Н.К. Кривулин

ОЦЕНИВАНИЕ КОНСТАНТЫ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1 Введение

Динамика многих реальных систем и процессов может быть описана при помощи векторных уравнений вида

$$\boldsymbol{x}(k) = A^T(k) \otimes \boldsymbol{x}(k-1),$$

которые являются линейными в некоторой идемпотентной алгебре. Такие обобщенные линейные динамические модели находят применение при анализе производственных систем, бизнес-процессов, вычислительных систем и сетей [1]. В частности, указанные модели оказываются весьма удобными при описании некоторых классов систем и сетей с очередями [2].

Одной из важных характеристик системы является средняя скорость роста вектора состояний системы $\boldsymbol{x}(k)$, которая может быть определена как величина

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\|\boldsymbol{x}(k)\|,$$

где $\|\cdot\|$ есть некоторый идемпотентный аналог обычной векторной нормы. По аналогии с традиционной теорией линейных динамических систем показатель скорости роста λ естественно назвать обобщенной константой (показателем) Ляпунова.

В случае стохастических систем, для которых матрица $A(k)$ является случайной, точное определение значения λ обычно оказывается достаточно сложной задачей. В этой ситуации разработка методов оценивания обобщенной константы Ляпунова представляется весьма актуальной. Ряд результатов в области построения оценок, а также точного вычисления λ представлены в [1, 3, 4, 5].

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ N 99-01-39137 ГФЕНК.

В настоящей работе рассматривается стохастическая модель обобщенной линейной динамической системы. На основе применения аппарата и методов идемпотентной алгебры для модели получен ряд нижних оценок и предложен общий подход к построению верхних оценок обобщенной константы Ляпунова.

2 Идемпотентная алгебра

Обозначим через $\mathbb{R}_\varepsilon$ множество вещественных чисел, расширенное путем добавления элемента $\varepsilon = -\infty$. Пусть на $\mathbb{R}_\varepsilon$ заданы операции $\oplus$ и $\otimes$ следующим образом:

$$x \oplus y = \max(x, y), \qquad x \otimes y = x + y$$

для любых $x, y \in \mathbb{R}_\varepsilon$ при условии, что $x \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes x = \varepsilon$.

Множество $\mathbb{R}_\varepsilon$ с операциями $\oplus$ и $\otimes$ является коммутативным полукольцом с идемпотентным сложением. Нулевым и единичным элементами относительно введенных операций являются ε и 0 соответственно. Такое полукольцо обычно называют идемпотентной алгеброй [1, 6].

Заметим, что в идемпотентной алгебре для всякого $x \neq \varepsilon$ определен обратный элемент x^{-1} относительно операции $\otimes$, который представляет собой $-x$ в обычной арифметике.

2.1 Алгебра матриц

Идемпотентная алгебра $(n \times n)$-матриц вводится обычным путем: для любых двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ имеем

$$\{A \oplus B\}_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}, \qquad \{A \otimes B\}_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{n} a_{ik} \otimes b_{kj}.$$

Матрица $\mathcal{E}$, все элементы которой равны ε, и матрица E с элементами, равными нулю на главной диагонали и ε вне ее, выполняют функции нулевой и единичной матриц соответственно.

Для всякой матрицы $A \neq \mathcal{E}$ можно определить степени: $A^0 = E$ и $A^k \otimes A^l = A^{k+l}$ для любых целых $k, l \geq 0$.

Введем обычную операцию арифметического сложения матриц как внешнюю по отношению к рассматриваемой алгебре. При записи алгебраических выражений будем предполагать, что в любой последовательности операций арифметическое сложение выполняется после операций $\otimes$ и $\oplus$.

Нетрудно проверить, что для любых матриц A, B, C и D справедливо неравенство

$$(A+B)\otimes(C+D) \leq A\otimes C + B\otimes D. \qquad (1)$$

2.2 Функции от матриц

Для любой матрицы $A=(a_{ij})$ можно определить следующие величины:

$$\|A\| = \bigoplus_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}, \qquad \mathrm{tr}(A) = \bigoplus_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Пусть A и B – некоторые матрицы. Ясно, что из покомпонентного неравенства $A \leq B$ следует $\|A\| \leq \|B\|$. Кроме того, выполняются очевидные соотношения:

$$\|A\oplus B\| = \|A\|\oplus\|B\|, \quad \|A\otimes B\| \leq \|A\|\otimes\|B\|, \quad \|A+B\| \leq \|A\|+\|B\|.$$

Для любого числа $c>0$ имеем $\|cA\| = c\|A\|$ при условии $c\varepsilon = \varepsilon$.

2.3 Собственные числа матриц

Рассмотрим произвольную матрицу A. Собственное число λ и соответствующий ему собственный вектор $\boldsymbol{x}$ матрицы A удовлетворяют равенству

$$A\otimes\boldsymbol{x} = \lambda\otimes\boldsymbol{x}.$$

Следующий результат был получен в [7] (см. также [8]).

Теорема 1. Для любой матрицы A существует предел

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\|A^k\| = \rho(A),$$

где $\rho(A)$ – максимальное собственное число матрицы, которое вычисляется по формуле

$$\rho(A) = \bigoplus_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\mathrm{tr}(A^i).$$

2.4 Случайные матрицы

Пусть элементы матрицы A являются случайными величинами. Обозначим через $\mathbb{E}[A]$ матрицу, полученную в результате применения оператора математического ожидания к каждому элементу матрицы A при условии, что $\mathbb{E}[\varepsilon]=\varepsilon$.

Предположим, что A и B – случайные матрицы. Нетрудно проверить справедливость следующих соотношений

$$\mathbb{E}[A\oplus B]\geq\mathbb{E}[A]\oplus\mathbb{E}[B],\quad \mathbb{E}[A\otimes B]\geq\mathbb{E}[A]\otimes\mathbb{E}[B],\quad \mathbb{E}\|A\|\geq\|\mathbb{E}[A]\|.$$

Кроме того, если матрицы A и B независимы, то

$$\mathbb{E}[A\oplus B]\geq\mathbb{E}[A\oplus\mathbb{E}[B]],\qquad \mathbb{E}\|A\otimes B\|\geq\mathbb{E}\|A\otimes\mathbb{E}[B]\|.$$

3 Обобщенные линейные системы

Рассмотрим систему, динамика которой описывается обобщенным линейным уравнением

$$\boldsymbol{x}(k)=A^{T}(k)\otimes\boldsymbol{x}(k-1),$$

где $A(k)$ – случайная $(n\times n)$-матрица, $\boldsymbol{x}(k)$ – n-мерный вектор. Будем предполагать, что матрицы $A(k)$, $k=1,2,\ldots$, одинаково распределены и независимы, а математическое ожидание $\mathbb{E}\|A(1)\|$ конечно.

При условии, что существует предел

$$\lambda=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\|\boldsymbol{x}(k)\|,$$

величину λ часто называют обобщенной константой Ляпунова для рассматриваемой системы [1, 4].

Введем матрицу

$$A_{k}=A(1)\otimes\cdots\otimes A(k).$$

Предполагая, что координаты начального вектора $\boldsymbol{x}(0)$ ограничены, обобщенную константу Ляпунова можно представить в виде

$$\lambda=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\|A_{k}\|.\tag{2}$$

Удобным инструментом для проверки существования предела является эргодическая теорема, доказанная в [9]. Из этой теоремы следует, что для рассматриваемой системы предел (2) существует с вероятностью 1, а также существует предел

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\mathbb{E}\|A_k\| = \lambda.$$

Простые верхнюю и нижнюю границы для λ можно получить следующим образом. Так как для $\|A_k\|$ выполняется

$$\|A_k\| \le \|A(1)\| \otimes \cdots \otimes \|A(k)\| = \|A(1)\| + \cdots + \|A(k)\|,$$

то очевидно, что

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\|A_k\| \le \mathbb{E}\|A(1)\|. \tag{3}$$

С другой стороны, выполняются неравенства

$$\mathbb{E}\|A_k\| \ge \|\mathbb{E}[A_k]\| \ge \|\mathbb{E}[A(1)] \otimes \cdots \otimes \mathbb{E}[A(k)]\| = \|(\mathbb{E}[A(1)])^k\|,$$

откуда в силу теоремы 1 следует оценка

$$\lambda \ge \rho(\mathbb{E}[A(1)]). \tag{4}$$

Заметим, что неравенства (3) и (4) являются точными в том смысле, что можно указать системы для которых они превращаются в равенства.

Пример 1.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots,$ – независимые одинаково распределенные случайные величины. Рассмотрим систему с матрицей

$$A(k) = \begin{pmatrix} \alpha_k & 0 \\ 0 & \alpha_k \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\|A_k\| = \bigotimes_{i=1}^{k} (0 \oplus \alpha_i) = \sum_{i=1}^{k} (0 \oplus \alpha_i),$$

откуда

$$\lambda = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\|A_k\| = \mathbb{E}[0 \oplus \alpha_1] = \mathbb{E}\|A(1)\|.$$

Пример 2.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, и $\beta_1, \beta_2, \ldots$, – две последовательности независимых и одинаково распределенные случайных величин. Определим матрицу системы $A(k)$ в виде

$$A(k) = \begin{pmatrix} \alpha_k & \varepsilon \\ \varepsilon & \beta_k \end{pmatrix}.$$

Так как тогда

$$A_k = \begin{pmatrix} \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_k & \varepsilon \\ \varepsilon & \beta_1 \otimes \cdots \otimes \beta_k \end{pmatrix},$$

то

$$\|A_k\| = \bigotimes_{i=1}^{k} \alpha_i \oplus \bigotimes_{i=1}^{k} \beta_i = \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \right) \oplus \left(\sum_{i=1}^{k} \beta_i \right).$$

Вычисление предела приводит к следующему результату:

$$\lambda = \mathbb{E}[\alpha_1] \oplus \mathbb{E}[\beta_1] = \rho(\mathbb{E}[A(1)]).$$

Пример 3.

Пусть $\{\alpha_k\}$, $\{\beta_k\}$, $\{\gamma_k\}$ и $\{\delta_k\}$ – последовательности случайных величин, имеющих экспоненциальное распределение со средним 1. Будем предполагать, что элементы каждой последовательности, а также сами последовательности независимы.

Рассмотрим систему с матрицей

$$A(k) = \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ \gamma_k & \delta_k \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Заметим, что для этой системы известно точное значение константы Ляпунова [4, 3]: $\lambda = 407/228 \approx 1{,}7851$.

Определим границы для λ в соответствии с (4) и (3). Так как

$$\mathbb{E}[A(1)] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

то для нижней границы будем иметь $\rho(\mathbb{E}[A(1)]) = 1$.

Вычисление верхней границы дает величину

$$\mathbb{E}\|A(1)\| = \mathbb{E}[\alpha_1 \oplus \beta_1 \oplus \gamma_1 \oplus \delta_1] = \frac{25}{12} \approx 2{,}0833.$$

4 Специальные виды матриц

4.1 Матрицы вида $A = \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}^T$

Пусть для некоторой матрицы A выполняется

$$A = \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}^T,$$

где $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ – некоторые вектора.

Нетрудно проверить, что тогда $\|A\| = \|\boldsymbol{u}\| \otimes \|\boldsymbol{v}\|$. Кроме того вектор $\boldsymbol{u}$ является собственным вектором матрицы:

$$A \otimes \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}^T \otimes \boldsymbol{u} = (\boldsymbol{v}^T \otimes \boldsymbol{u}) \otimes \boldsymbol{u}.$$

Аналогично, вектор $\boldsymbol{v}$ является собственным вектором A^T.

Рассмотрим матрицы A и B такие, что

$$A = \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}^T, \qquad B = \boldsymbol{r} \otimes \boldsymbol{s}^T,$$

где $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{s}$ – некоторые вектора. Ясно, что

$$\|A \otimes B\| = \|(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}^T) \otimes (\boldsymbol{r} \otimes \boldsymbol{s}^T)\| = (\boldsymbol{v}^T \otimes \boldsymbol{r}) \otimes \|\boldsymbol{u}\| \otimes \|\boldsymbol{s}\|.$$

Предположим, что для любого $k = 1, 2, \ldots$, справедливо представление $A(k) = \boldsymbol{u}(k) \otimes \boldsymbol{v}^T(k)$. Тогда для матрицы $A_k = A(1) \otimes \cdots \otimes A(k)$ будем иметь

$$\begin{aligned} \|A_k\| &= \|\boldsymbol{u}(1)\| \otimes \|\boldsymbol{v}(k)\| \otimes \bigotimes_{i=1}^{k-1} \boldsymbol{v}(i)^T \otimes \boldsymbol{u}(i+1) \\ &= \|\boldsymbol{u}(1)\| + \|\boldsymbol{v}(k)\| + \sum_{i=1}^{k-1} \boldsymbol{v}(i)^T \otimes \boldsymbol{u}(i+1). \end{aligned}$$

В этом случае константа Ляпунова равна

$$\lambda = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} \|A_k\| = \mathbb{E}[\boldsymbol{v}(1)^T \otimes \boldsymbol{u}(2)].$$

Нетрудно проверить, что произведение любых двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ может быть представлено в виде

$$A \otimes B = \bigoplus_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i \otimes \boldsymbol{b}^i,$$

где $\boldsymbol{a}_i = (a_{1i}, \ldots, a_{ni})^T$, $\boldsymbol{b}^i = (b_{i1}, \ldots, b_{in})$. Заметим, что при этом

$$\|A \otimes B\| = \bigoplus_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{a}_i\| \otimes \|\boldsymbol{b}^i\|.$$

Рассмотрим две последовательные матрицы $A(k)$ и $A(k+1)$. Очевидно, что для любого $j = 1, \ldots, n$, выполняется неравенство

$$A(k) \otimes A(k+1) \geq \boldsymbol{a}_j(k) \otimes \boldsymbol{a}^j(k+1),$$

где $\boldsymbol{a}_j(k)$ и $\boldsymbol{a}^j(k+1)$ – j-й столбец матрицы $A(k)$ и j-я строка матрицы $A(k+1)$ соответственно.

Тогда при $k = 2m$ имеем неравенство

$$\|A_k\| \geq \|\boldsymbol{a}_j(1)\| \otimes \|\boldsymbol{a}^j(k)\| \otimes \bigotimes_{i=1}^{m-1} \boldsymbol{a}^j(2i) \otimes \boldsymbol{a}_j(2i+1),$$

откуда следует нижняя оценка

$$\lambda \geq \frac{1}{2} \bigoplus_{j=1}^{n} \mathbb{E}[\boldsymbol{a}^j(1) \otimes \boldsymbol{a}_j(2)]. \tag{6}$$

Пример 4.

Вычислим оценку (6) для системы (5). Учитывая, что

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{a}^1(1) = (\alpha_1, \beta_1), & \boldsymbol{a}^2(1) = (\gamma_1, \delta_1), \\ \boldsymbol{a}_1(2) = (\alpha_2, \gamma_2)^T, & \boldsymbol{a}_2(2) = (\beta_2, \delta_2)^T, \end{array}$$

получим

$$\lambda \geq \frac{1}{2}(\mathbb{E}[\alpha_1 \otimes \alpha_2 \oplus \beta_1 \otimes \gamma_2] \oplus \mathbb{E}[\gamma_1 \otimes \beta_2 \oplus \delta_1 \otimes \delta_2]) = 1{,}375.$$

Пусть A и B – случайные матрицы. Для математического ожидания $\mathbb{E}\|A \otimes B\|$ выполняется неравенство

$$\mathbb{E}\|A \otimes B\| \geq \mathbb{E}\left[\bigoplus_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{a}_i\| \otimes \mathbb{E}\|\boldsymbol{b}^i\|\right] \geq \mathbb{E}\left[\bigoplus_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{a}_i\|\right] \otimes \min_{1 \leq i \leq n} \mathbb{E}\|\boldsymbol{b}^i\|.$$

Используя обозначение

$$\nu(B) = \min_{1 \leq i \leq n} \mathbb{E}\|\boldsymbol{b}^i\|,$$

окончательно запишем

$$\mathbb{E}\|A \otimes B\| \geq \mathbb{E}\|A\| \otimes \nu(B).$$

Последовательное применение последнего неравенства к матрице A_k позволяет заключить, что

$$\mathbb{E}\|A_k\| \geq E\|A(1)\| \otimes \bigotimes_{i=2}^{k} \nu(A(i)),$$

откуда следует

$$\lambda \geq \nu(A(1)).$$

Аналогично можно показать, что $\lambda \geq \nu(A^T(1))$. Объединив оба неравенства, имеем оценку

$$\lambda \geq \nu(A(1)) \oplus \nu(A^T(1)). \tag{7}$$

Пример 5.
Применение оценки (7) к системе (5) дает

$$\lambda \geq \min\{\mathbb{E}[\alpha_1 \oplus \beta_1], \mathbb{E}[\gamma_1 \oplus \delta_1]\} = 1{,}5.$$

4.2 Псевдоскалярные матрицы

Будем называть матрицу A псевдоскалярной, если для любого вектора $\boldsymbol{u}$ выполняется хотя бы одно из равенств

$$\|A \otimes \boldsymbol{u}\| = \|A\| \otimes \|\boldsymbol{u}\|, \qquad \|A^T \otimes \boldsymbol{u}\| = \|A^T\| \otimes \|\boldsymbol{u}\|.$$

Очевидно, что если A – псевдоскалярная матрица, то для любой матрицы B будет выполняться по крайней мере одно из равенств

$$\|A \otimes B\| = \|A\| \otimes \|B\|, \qquad \|B \otimes A\| = \|A\| \otimes \|B\|.$$

Пусть $A(k)$ – псевдоскалярная матрица для любого $k = 1, 2, \ldots$ Ясно, что тогда

$$\|A_k\| = \bigotimes_{i=1}^{k} \|A(i)\|$$

и следовательно,
$$\lambda = \mathbb{E}\|A(1)\|.$$

Легко видеть, что матрица, все элементы которой равны, является псевдоскалярной. В частности, псевдоскалярной матрицей будет нулевая матрица, все элементы которой равны 0. Кроме того, нетрудно проверить, что произведение любой матрицы A и нулевой матрицы представляет собой псевдоскалярную матрицу, причем $\|A \otimes 0\| = \|A\|$.

Будем называть матрицу A неразложимой, если выполняется условие $a_{ij} > \varepsilon$ при всех $i = 1, \ldots, n$, и $j = 1, \ldots, n$.

Предположим, что матрица $A(k)$ является неразложимой для любого $k = 1, 2, \ldots$ При $k = 2m$ будем иметь

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\|A_k\| &\geq \mathbb{E}\left\|\bigotimes_{i=1}^{m} A(2i-1) \otimes \mathbb{E}[A(2i)]\right\| \\ &\geq \mathbb{E}\left\|\bigotimes_{i=1}^{m} A(2i-1) \otimes 0\right\| \otimes \bigotimes_{i=1}^{m} \mu\left(\mathbb{E}[A(2i)]\right) \\ &= m\mathbb{E}\|A(1)\| + m\mu(\mathbb{E}[A(1)]),\end{aligned}$$

где $\mu(A) = \min\{a_{ij} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}$ для любой матрицы A.

Из полученного неравенства следует оценка для случая неразложимой матрицы $A(1)$

$$\lambda \geq \frac{1}{2}\mathbb{E}\|A(1)\| + \frac{1}{2}\mu(\mathbb{E}[A(1)]). \tag{8}$$

Пример 6.

Для системы (5) имеем $\mathbb{E}\|A(1)\| \approx 2{,}0833$, $\mu(\mathbb{E}[A(1)]) = 1$. Тогда оценка (8) принимает вид

$$\lambda \geq \frac{1}{2}(2{,}0833 + 1) \approx 1{,}5416.$$

Следующее утверждение представляет достаточные условия для того, чтобы матрица являлась псевдоскалярной.

Лемма 1. Если матрица A удовлетворяет хотя бы одному из условий:

1) для любых двух столбцов $\boldsymbol{a}_{j_1}$, $\boldsymbol{a}_{j_2}$ выполняется $\|\boldsymbol{a}_{j_1}\| = \|\boldsymbol{a}_{j_2}\|$;

2) для любых двух строк $\boldsymbol{a}^{i_1}$, $\boldsymbol{a}^{i_2}$ выполняется $\|\boldsymbol{a}^{i_1}\| = \|\boldsymbol{a}^{i_2}\|$;

то A является псевдоскалярной.

Доказательство. Предположим, что матрица A удовлетворяет достаточному условию для столбцов: $\|\boldsymbol{a}_{j_1}\| = \|\boldsymbol{a}_{j_2}\|$ для любых j_1, j_2. Тогда для произвольного вектора $\boldsymbol{u}$ будем иметь

$$\begin{aligned}\|A \otimes \boldsymbol{u}\| &= \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{n} a_{ij} \otimes u_j = \bigoplus_{j=1}^{n} \left(u_j \otimes \bigoplus_{i=1}^{n} a_{ij} \right) \\ &= \bigoplus_{j=1}^{n} (u_j \otimes \|\boldsymbol{a}_j\|) = \left(\bigoplus_{j=1}^{n} u_j \right) \otimes \left(\bigoplus_{j=1}^{n} \|\boldsymbol{a}_j\| \right) = \|\boldsymbol{u}\| \otimes \|A\|.\end{aligned}$$

Условие для строк рассматривается аналогично. ■

5 Разложение матриц

Теорема 2. Любую матрицу A можно представить в виде

$$A = \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}^T + S, \tag{9}$$

где $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ – некоторые вектора, $\boldsymbol{u} > \varepsilon$, $\boldsymbol{v} > \varepsilon$; S – псевдоскалярная матрица такая, что $\|S\| = 0$.

Доказательство. Очевидно, что для построения разложения (9) необходимо найти такие конечные вектора $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$, для которых матрица $B = A - \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}^T$ будет являться псевдоскалярной и $\|B\| = 0$. С этой целью потребуем, чтобы B удовлетворяла условию: $\|\boldsymbol{b}_j\| = 0$ для всех $j = 1, \ldots, n$.

Для каждого j запишем

$$0 = \|\boldsymbol{b}_j\| = \bigoplus_{i=1}^{n} (a_{ij} - u_i \otimes v_j) = \bigoplus_{i=1}^{n} (a_{ij} - u_i) - v_j,$$

откуда получим выражение для определения v_j:

$$v_j = \bigoplus_{i=1}^{n} (a_{ij} - u_i).$$

Таким образом показано, что любая пара векторов

$$\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n)^T > \varepsilon, \qquad \boldsymbol{v}^T = \boldsymbol{u}^* \otimes A,$$

где $\boldsymbol{u}^* = -\boldsymbol{u}^T$, обеспечивает разложение матрицы A вида (9). ∎

5.1 Построение верхних оценок

По теореме 2 для каждой матрицы $A(k)$, $k = 1, 2, \dots$, найдутся такие вектора $\boldsymbol{u}(k)$ и $\boldsymbol{v}(k)$, а также псевдоскалярная матрица $S(k)$, удовлетворяющая условию $\|S(k)\| = 0$, для которых будет выполняться равенство

$$A(k) = \boldsymbol{u}(k) \otimes \boldsymbol{v}(k)^T + S(k).$$

Тогда с учетом (1) будем иметь

$$\begin{aligned}
\|A_k\| &= \|A(1) \otimes \cdots \otimes A(k)\| \\
&\leq \left\| \bigotimes_{i=1}^{k} \boldsymbol{u}(i) \otimes \boldsymbol{v}(i)^T + \bigotimes_{i=1}^{k} S(i) \right\| \leq \left\| \bigotimes_{i=1}^{k} \boldsymbol{u}(i) \otimes \boldsymbol{v}(i)^T \right\| + \left\| \bigotimes_{i=1}^{k} S(i) \right\| \\
&= \|\boldsymbol{u}(i)\| \otimes \|\boldsymbol{v}(k)\| \otimes \bigotimes_{i=1}^{k-1} \boldsymbol{v}^T(i) \otimes \boldsymbol{u}(i+1).
\end{aligned}$$

Теперь можно вычислить верхнюю оценку

$$\lambda \leq \mathbb{E}[\boldsymbol{v}^T(1) \otimes \boldsymbol{u}(2)].$$

Выразим вектор $\boldsymbol{v}(1)$ через $\boldsymbol{u}(1)$ также, как в теореме 2. Запишем полученную оценку в виде

$$\lambda \leq \mathbb{E}[\boldsymbol{u}^*(1) \otimes A(1) \otimes \boldsymbol{u}(2)]. \tag{10}$$

Ясно, что (10) определяет не одну, а целое семейство оценок. Выбор оптимальной оценки из указанного семейства не является очевидным и требует дальнейшего исследования. Ниже приведен пример построения и расчета одной из оценок в случае (2×2)-матриц.

Пример 7.

Рассмотрим систему (5) и выберем элементы вектора $\boldsymbol{u}(1)$ следующим образом:

$$u_1(1) = 0, \qquad u_2(1) = \frac{1}{2}(\alpha_1^{-1} \otimes \beta_1^{-1} \otimes \gamma_1 \otimes \delta_1).$$

Вычисление координат вектора $\boldsymbol{v}(1)$ дает

$$\begin{aligned} v_1(1) &= \frac{1}{2}(\alpha_1 \otimes \delta_1^{-1} \otimes (\alpha_1 \otimes \delta_1 \oplus \beta_1 \otimes \gamma_1)), \\ v_2(1) &= \frac{1}{2}(\beta_1 \otimes \gamma_1^{-1} \otimes (\alpha_1 \otimes \delta_1 \oplus \beta_1 \otimes \gamma_1)). \end{aligned}$$

Теперь запишем

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}^T(1) \otimes \boldsymbol{u}(2) = \frac{1}{2}\Big(&(\alpha_1 \otimes \delta_1^{-1} \otimes (\alpha_1 \otimes \delta_1 \oplus \beta_1 \otimes \gamma_1)) \\ &\oplus (\beta_1 \otimes \gamma_1^{-1} \otimes (\alpha_1 \otimes \delta_1 \oplus \beta_1 \otimes \gamma_1) \otimes \alpha_2^{-1} \otimes \beta_2^{-1} \otimes \gamma_2 \otimes \delta_2)\Big). \end{aligned}$$

После вычисления математического ожидания, окончательно получим

$$\lambda \leq \mathbb{E}[\boldsymbol{v}^T(1) \otimes \boldsymbol{u}(2)] = \frac{123}{64} \approx 1{,}9219.$$

Список литературы

[1] **Baccelli F., Cohen G., Olsder G.J., Quadrat J.-P.** Synchronization and Linearity. – Chichester: Wiley, 1992.

[2] **Krivulin N.K.** Max-plus algebra models of queueing networks // Proc. Intern. Workshop on Discrete Event Systems WODES'96. – London: IEE, 1996. – P. 76–81.

[3] **Olsder G.J., Resing J.A.C., De Vries R.E., Keane M.S., Hooghiemstra G.** Discrete event systems with stochastic processing time // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1990. – Vol. 35. – N 3. – P. 299-302.

[4] **Jean-Marie A.** Analytical computation of Lyapunov exponents in stochastic event graphs // Performance Evaluation of Parallel and Distributed Systems; Solution Methods / Ed. by O. Boxma, G. Koole. – CWI Tracts, 1994. – P. 309-341.

[5] **Krivulin N.K.** Products of random matrices and queueing systems performance evaluation // Simulation 2001: Proc. 4th St. Petersburg Workshop on Simulation / Ed. by S.M. Ermakov, Yu.N. Kashtanov and V.B. Melas. – NII Chemistry St. Petersburg University Publishers, 2001. – P. 304-309.

[6] **Маслов В.П., Колокольцов В.Н.** Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. – М.: Физматлит, 1994.

[7] **Романовский И.В.** Оптимизация стационарного управления дискретным детерминированным процессом динамического программирования // Кибернетика. – 1967. – N 2. – С. 66-78.

[8] **Воробьев Н.Н.** Экстремальная алгебра положительных матриц // Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik. – 1967. – Bd. 3, N 1. – S. 39-72.

[9] **Kingman J.F.C.** Subadditive ergodic theory // Annals of Probability. – 1973. – Vol. 1. – P. 883-909.