

В. С. Сабанеев

О ДВИЖЕНИИ ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ В ЖИДКОСТИ,
ОГРАНИЧЕННОЙ ПЛОСКОЙ СТЕНКОЙ

В статье решается задача о произвольном движении удлиненного эллипсоида вращения в идеальной несжимаемой жидкости, ограниченной плоской стенкой; потенциалы скоростей вычислены приближенно в тех частных случаях, когда большая ось эллипсоида во время движения остается параллельной стенке.

§ 1. История вопроса

Задача о произвольном движении твердого тела в идеальной несжимаемой жидкости, ограниченной бесконечной плоской стенкой, гидродинамически эквивалентна задаче о движении в безграничной жидкости двух тел, являющихся зеркальным изображением друг друга и движущихся симметричным образом. В этом случае плоскость симметрии является поверхностью тока и может быть принята за непроницаемую плоскую стенку. Рассматриваемая задача, следовательно, является частным случаем задачи о произвольном движении двух или нескольких различных тел в безграничной идеальной несжимаемой жидкости.

Теория движения нескольких твердых тел в безграничной идеальной жидкости разработана сравнительно мало. Конкретные результаты получены лишь при решении задач о движении в жидкости двух подобных тел, например двух шаров, двух круглых цилиндров.

Первая попытка в этой области была сделана Стоксом [1] в 1843 г. В работе [1] Стокс приближенно решает задачу о движении шара как перпендикулярно, так и параллельно стенке. В обоих случаях Стокс определяет в выражении для силы, действующей на шар, только старший член из всех членов, обусловленных наличием стенки.

В 1867 г. Томсон и Тэт [2] впервые применяют метод обобщенных координат Лагранжа к решению гидродинамических задач. С помощью этого метода они устанавливают общие теоремы о движении шара в жидкости, ограниченной плоской стенкой.

В период с 1863 по 1876 г. Бьеркнес [3] публикует ряд статей, в которых подробно разбирает вопросы движения в жидкости одного и нескольких шаров как изменяющихся, так и неизменяющих свой объем.

В 1879 г. Хикс [4] решил задачу о произвольном движении в жидкости двух круглых цилиндров бесконечной длины, оси которых остаются параллельными во время движения. Потенциал скоростей найден им в конечном виде и выражается через эллиптические функции от биполярных координат.

Точное решение задачи о движении двух сфер вдоль линии, соединяющей их центры, было дано Хиксом [5] в 1880 г. Хикс решает задачу методом „изображений“ и получает коэффициенты при скоростях в выражении для кинетической энергии в виде бесконечных рядов. В этой же работе Хикс приближенно решает задачу о движении двух шаров перпендикулярно линии, соединяющей их центры.

В 1883 г. выходит в свет книга Неймана [6], посвященная применению принципа Гамильтона к задачам гидродинамики. Во втором и четвертом разделах этой книги рассматривается задача о движении шара в жидкости, ограниченной стенкой, и задача о движении двух шаров вдоль линии, соединяющей их центры, в безграничной жидкости. Нейман ищет потенциал в виде разложения по функциям Лежандра I рода и получает для коэффициентов этого разложения рекуррентные формулы.

В работе [7] Н. Е. Жуковский также рассматривает задачу о движении в жидкости двух малых шаров. Он исследует, кроме того, частный случай, когда шар движется вблизи стенки, и приходит к выводу, что присутствие стенки производит кажущееся изменение массы, различное в различных направлениях и выражающееся некоторым эллипсоидом измененных масс.

В 1887 г. Бассе в своей статье [8] предлагает новый способ решения задачи о движении двух шаров перпендикулярно линии, соединяющей их центры. Исходя из общих выражений для функций Лежандра I рода $P_n(\mu)$, он устанавливает зависимость между функциями Лежандра, связанными с различными началами и той же осью. Это дает ему возможность определить потенциал скоростей методом последовательных приближений.

Большая статья Германа [9], опубликованная в 1887 г., также посвящена рассмотрению различных вопросов, связанных с движением двух шаров в безграничной жидкости. В основе работы лежит некоторое видоизменение известной формулы для зональной сферической функции I рода. Потенциал и кинетическая энергия выражаются в компактной форме с помощью дифференциальных операторов специального вида.

За последующие 50—60 лет в области пространственных задач теории движения нескольких твердых тел в идеальной жидкости не произошло существенных изменений. Лишь в последние годы появилось несколько статей, посвященных решению пространственных задач [10], [11], [12].

В опубликованной в 1950 г. статье Айзенберга [10], насколько мне известно, впервые рассматривается задача о движении эллипсоида вращения в жидкости, ограниченной плоской стенкой. Основной целью работы является оценка влияния близости стенки на распределение давления на поверхности эллипсоида. Потенциал скоростей найден приближенно методом последовательных „изображений“ только в случае движения эллипсоида вдоль его большой оси параллельно стенке. Примененный приближенный метод есть по существу оценка функций Лежандра первого порядка ранга 0.

В 1953 г. Хавелок [12] вычисляет в первом приближении присоединенные массы эллипсоида вращения при различных движениях его в жидкости, ограниченной плоской стенкой. Более подробно результаты Хавелока будут рассмотрены в следующей статье автора.

В настоящей статье метод оценки функций Лежандра будет применен для приближенного вычисления потенциала скоростей в различ-

ных случаях движения удлиненного эллипсоида вращения около стенки.

§ 2. Постановка задачи

Рассмотрим движение удлиненного эллипсоида вращения в идеальной несжимаемой жидкости, ограниченной бесконечной плоской стенкой. Помещая с другой стороны стенки в каждый момент времени зеркальное изображение нашего тела, можно говорить о симметричном движении двух эллипсоидов вращения в безграничной жидкости.

Будем предполагать, что в начальный момент в жидкости не было вихрей. Тогда, по теореме Томсона, последующее движение идеальной жидкости будет также безвихревым, и будет существовать потенциал скоростей. Так как наши тела имеют конечные размеры, то пространство, занимаемое жидкостью, поверхностно односвязно. Следовательно, потенциал скоростей будет однозначным.

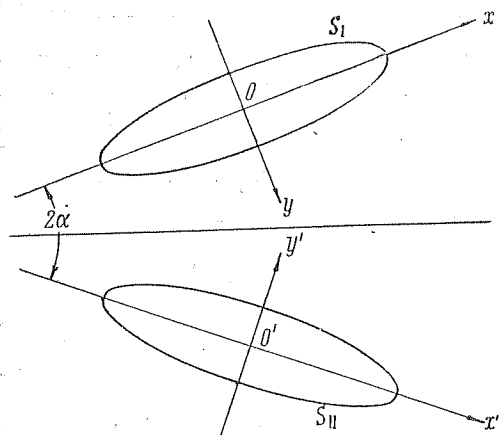


Рис. 1.

Движение жидкости будем рассматривать относительно подвижных систем координат, связанных с эллипсоидами. Введем две системы координат, симметричных относительно стенки (рис. 1):

- 1) систему $Oxyz$ с началом в центре эллипсоида I,
- 2) систему $O'x'y'z'$ с началом в центре эллипсоида II.

(Оси z и z' направлены за плоскость чертежа.)

Искомый потенциал скоростей Ψ должен удовлетворять следующим условиям:

А. Потенциал Ψ и его производные $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Psi}{\partial y}$, $\frac{\partial \Psi}{\partial z}$ должны быть непрерывны и однозначны во всем пространстве Ω , заполненном жидкостью.

Б. Потенциал Ψ должен удовлетворять уравнению неразрывности $\nabla^2 \Psi = 0$ во всем пространстве Ω .

В. В каждой точке поверхности эллипсоидов должны выполняться граничные условия:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial v} = V_v \text{ на } S_I, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial v'} = V_v' \text{ на } S_{II}.$$

(За положительное направление нормали примем внешнюю нормаль к поверхности тела.)

Г. Производные $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Psi}{\partial y}$, $\frac{\partial \Psi}{\partial z}$ должны обращаться в 0 в бесконечности, так как жидкость в бесконечности покоится.

Представим потенциал Ψ в виде суммы двух потенциалов

$$\Psi = \Phi + \Phi', \quad (1)$$

удовлетворяющих условиям:

А. Φ , $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ непрерывны и однозначны в Ω ,

Б. $\nabla^2 \Phi = 0$ в Ω ,

В. $\frac{\partial \Phi}{\partial v} = V_v$ на S_I ,

$\frac{\partial \Phi}{\partial v'} = 0$ на S_{II} ,

Г. $(\text{grad } \Phi)_\infty = 0$.

(2)

А. Φ' , $\frac{\partial \Phi'}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi'}{\partial y}$, $\frac{\partial \Phi'}{\partial z}$ непрерывны и однозначны в Ω ,

Б. $\nabla^2 \Phi' = 0$ в Ω ,

В. $\frac{\partial \Phi'}{\partial v} = 0$ на S_I ,

$\frac{\partial \Phi'}{\partial v'} = V_v'$ на S_{II} ,

Г. $(\text{grad } \Phi')_\infty = 0$.

(3)

Очевидно, что Φ представляет собой потенциал скоростей, создаваемый движением эллипсоида I в жидкости в присутствии неподвижного эллипсоида II, а Φ' — потенциал, создаваемый движением эллипсоида II в присутствии неподвижного эллипсоида I.

Для нахождения Ψ достаточно знать вид Φ , так как Φ' имеет такую же структуру в силу симметрии.

Для того чтобы определить Φ , надо знать нормальные к S_I составляющие скоростей точек этой поверхности. Распределение скоростей точек твердого тела определяется заданием скорости $\bar{U}(U_1, U_2, U_3)$ одной точки и заданием угловой скорости вращения $\bar{\omega}(U_4, U_5, U_6)$. За эту точку примем центр эллипсоида I, тогда

$$\bar{V} = \bar{U} \times \bar{r}.$$

Проекция скорости на нормаль к поверхности S_I равна

$$V_v = V_x l + V_y m + V_z n = (U_1 + U_5 z - U_6 y) l + (U_2 + U_6 x - U_4 z) m + (U_3 + U_4 y - U_5 x) n,$$

где l, m, n — направляющие косинусы нормали.

На поверхности эллипсоида вращения $yn \equiv zm$. Поэтому граничное условие (2) „В“ можно записать в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = U_1 l + U_2 m + U_3 n + U_5 (zl - xn) + U_6 (xm - yl) \text{ на } S_I. \quad (4)$$

Из вида граничного условия (4) следует, что потенциал Φ должен иметь вид:

$$\Phi = U_1 \varphi_1 + U_2 \varphi_2 + U_3 \varphi_3 + U_5 \varphi_5 + U_6 \varphi_6. \quad (5)$$

Действительно, вращение эллипсоида I вокруг оси x не вызывает движения жидкости, и, следовательно, $\varphi_4 = 0$.

Каждая из функций φ_i должна удовлетворять условиям „А“, „Б“ и „Г“ и граничным условиям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} &= l \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} &= m \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} &= n \\ \frac{\partial \varphi_5}{\partial v} &= zl - xn \\ \frac{\partial \varphi_6}{\partial v} &= xm - yl \end{aligned} \right\} \text{ на } S_I \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v'} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial v'} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial v'} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi_5}{\partial v'} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi_6}{\partial v'} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ на } S_{II} \quad (7)$$

Все функции φ_i определяются только формой поверхности S_I, S_{II} наших тел и выбором системы координат. Функции $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ представляют собой потенциалы скоростей при движении эллипсоида I с единичной скоростью вдоль осей Ox, Oy, Oz в присутствии неподвижного эллипсоида II. Функции φ_5, φ_6 соответствуют вращению эллипсоида I с единичной угловой скоростью вокруг осей Oy, Oz в присутствии неподвижного эллипсоида II.

Проводя аналогичные рассуждения для эллипсоида II и пользуясь при этом системой координат $O'x'y'z'$, получим для потенциала Φ' выражение

$$\Phi' = U_1 \varphi_1' + U_2 \varphi_2' + U_3 \varphi_3' + U_5 \varphi_5' + U_6 \varphi_6', \quad (8)$$

причем функции φ_i' имеют смысл, аналогичный φ_i .

Таким образом, потенциал Ψ должен иметь вид

$$\Psi = U_1 (\varphi_1 + \varphi_1') + U_2 (\varphi_2 + \varphi_2') + U_3 (\varphi_3 + \varphi_3') + U_5 (\varphi_5 + \varphi_5') + U_6 (\varphi_6 + \varphi_6'), \quad (9)$$

и наша задача сводится к вычислению пяти функций $\varphi_i + \varphi_i'$ ($i = 1, 2, 3, 5, 6$).

§ 3. О возможности получения точного решения

При решении задачи целесообразно пользоваться ортогональной системой криволинейных координат, т. е. в данном случае эллиптической системой координат. Эллиптические координаты должны быть выбраны таким образом, чтобы рассматриваемый эллипсоид принадлежал к софокусному семейству.

С каждым из эллипсоидов I и II свяжем свою систему эллиптических координат, положив:

$$\begin{aligned} x &= k\mu\zeta, & 1 &\leq \zeta < \infty, \\ y &= \tilde{\omega} \cos \omega, & -1 &\leq \mu \leq +1, \\ z &= \tilde{\omega} \sin \omega, & 0 &\leq \omega < 2\pi, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \text{где } \tilde{\omega} &= k(1 - \mu^2)^{1/2} (\zeta^2 - 1)^{1/2}; \\ x' &= k\mu'\zeta', & 1 &\leq \zeta' < \infty, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' &= \tilde{\omega}' \cos \omega', & -1 &\leq \mu' \leq +1, \\ z' &= \tilde{\omega}' \sin \omega', & 0 &\leq \omega' < 2\pi, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{где } \tilde{\omega}' = k(1 - \mu'^2)^{1/2} (\zeta'^2 - 1)^{1/2}.$$

Все координаты со штрихами относятся к системе координат, связанной с эллипсоидом II; k — половина фокусного расстояния эллипсоидов.

Уравнения поверхностей S_I, S_{II} эллипсоидов I и II имеют в эллиптических координатах простейший вид

$$\zeta = e_0^{-1} \text{ для } S_I \text{ и } \zeta' = e_0^{-1} \text{ для } S_{II},$$

где e_0 — эксцентриситет меридионального сечения.

Уравнение Лапласа в эллиптических координатах [13]

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right\} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ (\zeta^2 - 1) \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right\} + \frac{\zeta^2 - \mu^2}{(1 - \mu^2)(\zeta^2 - 1)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2} = 0. \quad (12)$$

Граничные условия (6), (7) примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta} &= k\mu \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial \zeta} &= k(1 - \mu^2)^{1/2} (1 - e_0^2)^{-1/2} \cos \omega \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial \zeta} &= k(1 - \mu^2)^{1/2} (1 - e_0^2)^{-1/2} \sin \omega \\ \frac{\partial \varphi_5}{\partial \zeta} &= -k^2 \mu (1 - \mu^2)^{1/2} e_0 (1 - e_0^2)^{-1/2} \sin \omega \\ \frac{\partial \varphi_6}{\partial \zeta} &= k^2 \mu (1 - \mu^2)^{1/2} e_0 (1 - e_0^2)^{-1/2} \cos \omega \end{aligned} \right\} \text{ на } S_I \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta'} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial \zeta'} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial \zeta'} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi_5}{\partial \zeta'} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi_6}{\partial \zeta'} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ на } S_{II}. \quad (14)$$

Известно, что уравнению (12) можно удовлетворить функциями вида

$$P_n^s(\mu) Q_n^s(\zeta) \begin{cases} \sin s\omega, \\ \cos s\omega, \end{cases}$$

где $P_n^s(\mu), Q_n^s(\zeta)$ — присоединенные функции Лежандра I и II рода порядка n и ранга s .

Поэтому точное решение поставленной задачи может быть получено в виде

$$\varphi_i = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=0}^n \{A_{ns}^i \cos s\omega + B_{ns}^i \sin s\omega\} P_n^s(\mu) Q_n^s(\zeta). \quad (15)$$

Коэффициенты A_{ns}^i и B_{ns}^i , а следовательно, и потенциалы φ_i , обычно определяют методом последовательных приближений. За первое приближение примем потенциал $\varphi_i^{(1)}$, создаваемый соответствующими

щим движением эллипсоида I в безграничной жидкости. Вид потенциалов $\varphi_i^{(1)}$ в присоединенных функциях Лежандра для удлинённого эллипсоида вращения известен [13].

Потенциал $\varphi_i^{(1)}$, удовлетворяя граничному условию на S_I , создает нормальные составляющие скоростей на S_{II} . Последние должны быть погашены добавлением нового потенциала $\varphi_i^{(2)}$, который определяется из уравнения

$$\frac{\partial \varphi_i^{(2)}}{\partial \nu'} = -\frac{\partial \varphi_i^{(1)}}{\partial \nu'} \quad \text{на } S_{II}.$$

Для функции $\varphi_i^{(1)} + \varphi_i^{(2)}$ граничные условия будут выполняться на S_{II} , но не будут выполняться на S_I . Для того чтобы исправить эту ошибку, надо найти функцию $\varphi_i^{(3)}$, которая погашала бы нормальные составляющие скоростей, соответствующие потенциалу $\varphi_i^{(2)}$ на S_I и т. д.

Продолжая этот процесс, в результате получим ряд

$$\varphi_i = \varphi_i^{(1)} + \varphi_i^{(2)} + \varphi_i^{(3)} + \dots + \varphi_i^{(n)} + \dots, \quad (16)$$

который и будет представлять искомый потенциал.

Основная трудность поставленной задачи заключается в том, что граничные условия заданы на двух поверхностях. При практическом применении метода последовательных приближений эта трудность приводит к необходимости переходить в выражении для потенциалов $\varphi_i^{(n)}$ от координат ζ, μ, ω к координатам ζ', μ', ω' , хотя бы на поверхности эллипсоидов. Точнее говоря, для нахождения $\varphi_i^{(n)}$ надо выразить $\varphi_i^{(n-1)}$ через присоединенные функции Лежандра, связанные с другим эллипсоидом.

Таким образом, для точного решения поставленной задачи нужно знать зависимость между присоединенными функциями Лежандра, связанными с различными началами и различным направлением осей. Если такая зависимость известна, то коэффициенты A_{ns}^i и B_{ns}^i в (15) можно получить в виде бесконечных рядов. Насколько мне известно, в настоящее время отсутствуют работы, в которых определялась бы зависимость между присоединенными функциями Лежандра, хотя бы для частных случаев расположения осей и начал координат.

Следует отметить, что точный подсчет коэффициентов A_{ns}^i и B_{ns}^i , если бы и был возможен, то являлся бы чрезвычайно громоздкой задачей. Поэтому точное решение задачи мало пригодно для практического использования.

§ 4. Приближенный метод вычисления потенциалов φ_i

Ограничимся рассмотрением частного, но важного для практики случая, когда большие оси эллипсоидов остаются параллельными во время движения. Иначе говоря, будем вычислять частные значения потенциалов φ_i при $2\alpha = 0$, т. е. $\varphi_i = \varphi_i(\zeta, \mu, \omega, \zeta', \mu', \omega', e_0, 2h, 0)$, где 2α — угол между большими осями эллипсоидов; $2h$ — расстояние между центрами эллипсоидов.

В рассматриваемом частном случае между введенными в § 2 системами координат $Oxuz$ и $O'x'y'z'$ будет существовать простая зависимость (рис. 2)

$$x = x', \quad y + y' = 2h, \quad z = z'. \quad (17)$$

Между системами [эллиптических координат будет иметь место аналогичная зависимость:

$$\begin{aligned} k\mu\zeta &= k\mu'\zeta', \\ \tilde{\omega} \cos \omega + \tilde{\omega}' \cos \omega' &= 2h, \\ \tilde{\omega} \sin \omega &= \tilde{\omega}' \sin \omega. \end{aligned} \quad (18)$$

Для нахождения приближенного решения задачи введем некоторые упрощения в процесс последовательных приближений. В выражение для $\varphi_i^{(n)}$ входят, вообще говоря, члены, содержащие функции Лежандра различных порядков и рангов. При приближенном решении задачи ограничимся рассмотрением в потенциалах $\varphi_i^{(n)}$ только одного члена, содержащего функцию Лежандра того же порядка и ранга, что и потенциал $\varphi_i^{(1)}$. Иными словами, при вычислении $\varphi_i^{(n)}$ будем приближенно считать, что все воздействие потока, описываемого потенциалом $\varphi_i^{(n-1)}$, на эллипсоид сводится к содействию ему некоторой скоростью, линейной или угловой, коллинеарной скорости эллипсоида, вызвавшего движение жидкости.

При этом допущении процесс последовательных приближений можно представить следующим образом. Поток, описываемый потенциалом $\varphi_i^{(1)}$, увлекает эллипсоид II с некоторой скоростью. Для того чтобы эллипсоид II оставался неподвижным, ему нужно сообщить скорость, равную и противоположную той, с которой он увлекается жидкостью. Этому соответствует добавление потенциала $\varphi_i^{(2)}$, вычисленного приближенно. Сообщая эллипсоиду II некоторую скорость, мы тем самым сообщаем определенные скорости всем частицам жидкости. Следовательно, эллипсоид I будет двигаться уже не с единичной скоростью, а с некоторой другой и т. д.

Таким образом, для приближенного вычисления $\varphi_i^{(n)}$ достаточно знать скорость, с которой соответствующий эллипсоид увлекается потоком, описываемым потенциалом $\varphi_i^{(n-1)}$. Указанную скорость будем определять приближенно.

С математической точки зрения рассмотренный метод представляет собой оценку коэффициента при члене, содержащем функцию Лежандра того же порядка и ранга, что и потенциал $\varphi_i^{(1)}$. Этот метод был применен Айзенбергом [10] в частном случае движения эллипсоида вращения вдоль его большой оси параллельно стенке.

§ 5. Вычисление потенциала $\varphi_3 + \varphi_3'$

Приближенное выражение для потенциала $\varphi_3 + \varphi_3'$ может быть найдено методом, примененным Айзенбергом для вычисления $\varphi_1 + \varphi_1'$. Вид потенциала, создаваемого движением удлинённого эллипсоида

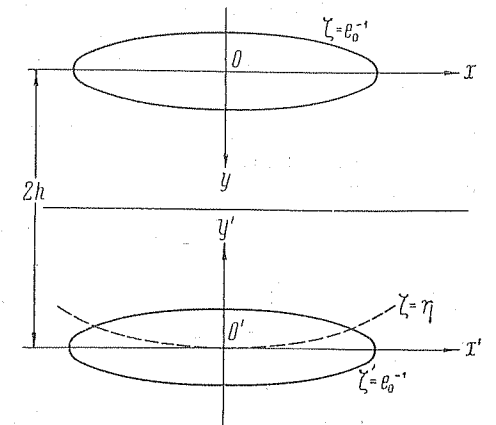


Рис. 2.

вращения вдоль одной из экваториальных осей в безграничной жидкости, в эллиптических координатах дан Ламбом [13]. Для движения эллипсоида I вдоль оси z имеем:

$$\varphi_3^{(1)} = A_3 P_1^1 Q_1^1 \sin \omega. *$$

Постоянная A_3 определяется из граничного условия (13) и равна

$$A_3 = k [(1 - e_0^2)^{1/2} \dot{Q}_1^1 (e_0^{-1})]^{-1}. \quad (19)$$

Третье соотношение (18) можно записать в виде

$$P_1^1 \sin \omega = (\zeta'^2 - 1)^{1/2} (\zeta^2 - 1)^{-1/2} \bar{P}_1^1 \sin \omega'.$$

Тогда потенциал $\varphi_3^{(1)}$ может быть представлен следующим образом:

$$\varphi_3^{(1)} = A_3 (\zeta'^2 - 1)^{1/2} (\zeta^2 - 1)^{-1/2} Q_1^1 \bar{P}_1^1 \sin \omega'.$$

Координатные поверхности $\zeta = \text{const}$ разбивают поверхность эллипсоида II на семейство кривых, уравнения которых $\zeta = \text{const}$, $\zeta' = e_0^{-1}$. На каждой из этих кривых распределение нормальных составляющих скоростей определяется по формуле

$$\frac{\partial \varphi_3^{(1)}}{\partial \zeta'} = A_3 (1 - e_0^2)^{-1/2} (\zeta^2 - 1)^{-1/2} Q_1^1 \bar{P}_1^1 \sin \omega', \quad (20)$$

причем ζ для каждой кривой свое.

Заменим систему нормальных составляющих (20) более простой. Будем считать, что распределения нормальных скоростей на верхней и на нижней половинах поверхности S_{II} мало отличаются друг от друга, т. е. примем приближенно, что

$$\frac{\partial \varphi_3^{(1)}}{\partial \zeta'} = A_3 (1 - e_0^2)^{-1/2} (\eta^2 - 1)^{-1/2} Q_1^1 (\eta) \bar{P}_1^1 \sin \omega' \quad (21)$$

на всей поверхности эллипсоида II.

Иначе говоря, мы считаем, что поток, создаваемый движением эллипсоида I, вблизи поверхности S_{II} эллипсоида II мало отличается от поступательного потока.

Для того чтобы уничтожить нормальные составляющие скоростей на S_{II} (21), добавим потенциал

$$\varphi_3^{(2)} = -A_3 [(\eta^2 - 1)^{-1/2} Q_1^1 (\eta)] [(1 - e_0^2)^{1/2} \dot{Q}_1^1 (e_0^{-1})]^{-1} \bar{P}_1^1 \bar{Q}_1^1 \sin \omega'. \quad (22)$$

При этом граничное условие (14) будет выполнено точно на кривой $\zeta = \eta$, $\zeta' = e_0^{-1}$ и приближенно на всех остальных. В качестве такой кривой удобно брать кривую, вырезаемую из поверхности S_{II} координатной поверхностью $\zeta = \eta$, проходящей через центр эллипсоида II. Тогда для определения η будем иметь соотношение

$$k (\eta^2 - 1)^{1/2} = 2h,$$

откуда

$$\eta = \left[1 + \left(\frac{2h}{k} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (23)$$

* Здесь, как и всюду далее, приняты сокращения

$$P_n^s = P_n^s(\mu); \quad \bar{P}_n^s = P_n^s(\mu'); \quad Q_n^s = Q_n^s(\zeta); \quad \bar{Q}_n^s = Q_n^s(\zeta').$$

Покажем, что при таком выборе η за скорость поступательного потока принимается скорость частицы жидкости, совпадающей с центром O' эллипсоида II в предположении, что последний отсутствует. Как видно из (21) и (22), скорость эквивалентного поступательного потока считается равной

$$[(\eta^2 - 1)^{-1/2} Q_1^1 (\eta)] \cdot [(1 - e_0^2)^{1/2} \dot{Q}_1^1 (e_0^{-1})]^{-1}.$$

Подсчитаем теперь скорость частицы жидкости, совпадающей с центром O' эллипсоида II. В точке O' $\zeta = \eta$, $\mu = 0$ и $\omega = 0$. Следовательно, компоненты скорости, создаваемые движением эллипсоида I вдоль оси z , в точке O' равны

$$\frac{\partial \varphi_3^{(1)}}{\partial \zeta} = 0; \quad \frac{\partial \varphi_3^{(1)}}{\partial \mu} = 0; \quad \frac{\partial \varphi_3^{(1)}}{\partial \omega} = \frac{A_3}{k} (\eta^2 - 1)^{-1/2} Q_1^1 (\eta).$$

Подставляя значение A_3 (19), получим, что точка O' при отсутствии эллипсоида II двигалась бы со скоростью

$$[(\eta^2 - 1)^{-1/2} Q_1^1 (\eta)] [(1 - e_0^2)^{1/2} \dot{Q}_1^1 (e_0^{-1})]^{-1},$$

что и требовалось показать.

Вернемся к вычислению потенциалов $\varphi_3^{(n)}$. Проводя точно такие же рассуждения с потенциалом $\varphi_3^{(2)}$, найдем, что ему соответствуют на поверхности эллипсоида I нормальные скорости

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_3^{(2)}}{\partial \zeta} = & -A_3 [(\eta^2 - 1)^{-1/2} Q_1^1 (\eta)] [(1 - e_0^2)^{1/2} \dot{Q}_1^1 (e_0^{-1})]^{-1} \times \\ & \times [(\zeta'^2 - 1)^{-1/2} \bar{Q}_1^1] (1 - e_0^2)^{-1/2} P_1^1 \sin \omega, \end{aligned}$$

которые будем считать приближенно равными

$$\frac{\partial \varphi_3^{(2)}}{\partial \zeta} = -A_3 [(\eta^2 - 1)^{-1/2} Q_1^1 (\eta)]^2 \cdot [(1 - e_0^2)^{1/2} \dot{Q}_1^1 (e_0^{-1})]^{-1} (1 - e_0^2)^{-1/2} P_1^1 \sin \omega.$$

Следовательно, потенциал $\varphi_3^{(3)}$ должен быть равен

$$\varphi_3^{(3)} = A_3 [(\eta^2 - 1)^{-1/2} Q_1^1 (\eta)]^2 \cdot [(1 - e_0^2)^{1/2} \dot{Q}_1^1 (e_0^{-1})]^{-2} P_1^1 Q_1^1 \sin \omega.$$

Теперь закон построения последовательных приближений ясен. Каждая из функций $\varphi_3^{(n)}$ удовлетворяет условиям „А“, „Б“ и „Г“, так как отличается от $\varphi_3^{(1)}$ или $\varphi_3^{(1)}$ только на постоянный множитель. Легко видеть, что потенциалы $\varphi_3^{(n)}$ получаются из соответствующих потенциалов $\varphi_3^{(n)}$ изменением координат без штрихов на координаты со штрихами и наоборот, и, следовательно, также удовлетворяют условиям „А“, „Б“ и „Г“.

Суммируя все найденные потенциалы $\varphi_3^{(n)}$ и $\varphi_3^{(n)}$, получаем

$$\begin{aligned} \varphi_3 + \varphi_3' = & A_3 [P_1^1 Q_1^1 \sin \omega + \bar{P}_1^1 \bar{Q}_1^1 \sin \omega'] \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \times \\ & \times \left[\frac{(\eta^2 - 1)^{-1/2} Q_1^1 (\eta)}{(1 - e_0^2)^{1/2} \dot{Q}_1^1 (e_0^{-1})} \right]^k. \end{aligned} \quad (24)$$

Бесконечный ряд в выражении (24) представляет собой геометрическую прогрессию. Покажем, что знаменатель этой прогрессии меньше 1. Положим $\eta = e^{-1}$ и представим знаменатель прогрессии в виде отношения рядов

$$\frac{-(\eta^2 - 1)^{-1/2} Q_1^1(\eta)}{(1 - e_0^2)^{1/2} Q_1^1(e_0^{-1})} = \frac{\frac{2}{3} e^3 + \frac{4}{5} e^5 + \frac{6}{7} e^7 + \dots}{\frac{4}{3} e_0^3 + \frac{6}{5} e_0^5 + \frac{8}{7} e_0^7 + \dots}$$

Поскольку координата ζ увеличивается при удалении от эллипсоида, то $\eta > e_0^{-1}$, и, следовательно, $e < e_0$. Поэтому знаменатель прогрессии при любых e_0 и η меньше единицы, и ряд сходится.

Применяя формулу для суммы геометрической прогрессии и подставляя значение A_3 (19), получим

$$\varphi_3 + \varphi_3' = k \frac{P_1^1 Q_1^1 \sin \omega + \bar{P}_1^1 \bar{Q}_1^1 \sin \omega'}{(1 - e_0^2)^{1/2} Q_1^1(e_0^{-1}) + (\eta^2 - 1)^{-1/2} Q_1^1(\eta)}. \quad (25)$$

Функция $\varphi_3 + \varphi_3'$ удовлетворяет всем условиям, сформулированным в § 2. Она представляет собой линейную комбинацию функций $\varphi_3^{(1)}$ и $\varphi_3'^{(1)}$ и, следовательно, удовлетворяет условиям „А“, „Б“ и „Г“. Кроме того, она приближенно удовлетворяет граничному условию (13) по самому методу ее построения.

§ 6. Вычисление потенциала $\varphi_2 + \varphi_2'$

Потенциал $\varphi_2^{(1)}$, создаваемый движением эллипсоида I вдоль оси y в безграничной жидкости, имеет вид:

$$\varphi_2^{(1)} = A_2 P_1^1 Q_1^1 \cos \omega.$$

Постоянная A_2 определяется из граничного условия (13) и равна постоянной A_3 (19).

Будем считать, как и в предыдущем случае, что поток, создаваемый движением эллипсоида I, вблизи поверхности эллипсоида II мало отличается от поступательного потока. За скорость этого потока примем скорость частицы жидкости, совпадающей с центром O' эллипсоида II в предположении, что последний отсутствует.

Подсчитаем скорость точки O' при отсутствии эллипсоида II. В точке O' $\zeta = \eta$, $\mu = 0$ и $\omega = 0$, следовательно, компоненты скорости равны

$$\frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial \zeta} = A_2 Q_1^1(\eta); \quad \frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial \mu} = 0; \quad \frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial \omega} = 0.$$

Таким образом, приближенно считаем, что на эллипсоид II набегает поступательный поток со скоростью

$$\frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial y} = [\eta^{-1} (\eta^2 - 1)^{1/2} Q_1^1(\eta)] [(1 - e_0^2)^{1/2} Q_1^1(e_0^{-1})]^{-1}.$$

Для того чтобы эллипсоид II оставался в покое, сообщим ему равную и противоположную по направлению скорость. Это движение эллипсоида II создаст в жидкости потенциал $\varphi_2^{(2)}$. Заметим, что эллипсоид II увлекался потоком в положительном направлении оси y и,

следовательно, в отрицательном направлении оси y' . Поэтому

$$\varphi_2^{(2)} = A_2 [\eta^{-1} (\eta^2 - 1)^{1/2} Q_1^1(\eta)] [(1 - e_0^2)^{1/2} Q_1^1(e_0^{-1})]^{-1} \bar{P}_1^1 \bar{Q}_1^1 \cos \omega'.$$

Проводя теперь такие же рассуждения с потенциалом $\varphi_2^{(2)}$, найдем, что скорость движения эллипсоида I изменится вследствие движения эллипсоида II на величину

$$[\eta^{-1} (\eta^2 - 1)^{1/2} Q_1^1(\eta)]^2 [1 - e_0^2]^{1/2} Q_1^1(e_0^{-1})^{-2}.$$

Тогда, учитывая изменение знака при переходе от оси y' к оси y , получим для потенциала $\varphi_2^{(3)}$ выражение:

$$\varphi_2^{(3)} = A_2 [\eta^{-1} (\eta^2 - 1)^{1/2} Q_1^1(\eta)]^2 [(1 - e_0^2)^{1/2} Q_1^1(e_0^{-1})]^{-2} P_1^1 Q_1^1 \cos \omega.$$

Таким образом, закон построения последовательных приближений ясен. Каждая из функций $\varphi_2^{(n)}$ и $\varphi_2'^{(n)}$ удовлетворяет условиям „А“, „Б“ и „Г“, так как отличается от $\varphi_2^{(1)}$ или $\varphi_2'^{(1)}$ на множитель, не зависящий от координат.

Суммируя все найденные потенциалы, получим

$$\varphi_2 + \varphi_2' = A_2 [P_1^1 Q_1^1 \cos \omega + \bar{P}_1^1 \bar{Q}_1^1 \cos \omega'] \times \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\eta^{-1} (\eta^2 - 1)^{1/2} Q_1^1(\eta)}{(1 - e_0^2)^{1/2} Q_1^1(e_0^{-1})} \right]^k. \quad (26)$$

Покажем, что знаменатель геометрической прогрессии, входящей в (26), меньше единицы. Положим $\eta = e^{-1}$, тогда

$$\frac{\eta^{-1} (\eta^2 - 1)^{1/2} Q_1^1(\eta)}{(1 - e_0^2)^{1/2} Q_1^1(e_0^{-1})} = \frac{\frac{4}{3} e^3 + \frac{6}{5} e^5 + \frac{8}{7} e^7 + \dots}{\frac{4}{3} e_0^3 + \frac{6}{5} e_0^5 + \frac{8}{7} e_0^7 + \dots}$$

Поскольку всегда $e < e_0$, то наше утверждение очевидно, и ряд, входящий в (26), сходится при любых e_0 и η .

Производя суммирование в (26) и подставляя значение коэффициента A_2 , получаем

$$\varphi_2 + \varphi_2' = k \frac{P_1^1 Q_1^1 \cos \omega + \bar{P}_1^1 \bar{Q}_1^1 \cos \omega'}{(1 - e_0^2)^{1/2} Q_1^1(e_0^{-1}) - \eta^{-1} (\eta^2 - 1)^{1/2} Q_1^1(\eta)} \quad (27)$$

Функция $\varphi_2 + \varphi_2'$ удовлетворяет всем условиям, сформулированным в § 2, по соображениям, приведенным в § 5 для функции $\varphi_3 + \varphi_3'$. Следует отметить, что в отличие от потенциалов $\varphi_1 + \varphi_1'$ и $\varphi_3 + \varphi_3'$ потенциал $\varphi_2 + \varphi_2'$ зависит от времени, поскольку в данном случае η является функцией времени.

Потенциал $\varphi_5 + \varphi_5'$, создаваемый вращением эллипсоидов I и II вокруг осей y и y' , может быть вычислен методом, примененным для вычисления $\varphi_3 + \varphi_3'$. Для перехода от функций Лежандра, связанных с одним эллипсоидом, к функциям Лежандра, связанным с другим эллипсоидом, следует воспользоваться тождеством $xz \equiv x'z'$, выраженным в эллиптических координатах. Опуская все промежуточные выкладки, приведем лишь окончательный результат вычислений

$$\varphi_5 + \varphi'_5 = -\frac{k^3}{3} \cdot \frac{e_0^2}{2 - e_0^2} \cdot \frac{P_2^1 Q_2^1 \sin \omega + \bar{P}_2^1 \bar{Q}_2^1 \sin \omega'}{e_0 (2 - e_0^2)^{-1} (1 - e_0^2)^{1/2} Q_2^1 (e_0^{-1}) + \eta^{-1} (\eta^2 - 1)^{-1/2} Q_2^1 (\eta)}. \quad (28)$$

Функция $\varphi_5 + \varphi'_5$ удовлетворяет условиям „А“, „Б“ и „Г“ точно и граничному условию приближенно по соображениям, приведенным в § 5.

§ 7. Вычисление потенциала скоростей в частных случаях шара и круглого цилиндра

Применим вышеизложенный приближенный метод к вычислению потенциала скоростей, создаваемого движением около стенки шара и круглого цилиндра бесконечной длины.

В случае шара потенциал Ψ имеет вид:

$$\Psi = U_1 (\varphi_1 + \varphi'_1) + U_2 (\varphi_2 + \varphi'_2) + U_3 (\varphi_3 + \varphi'_3),$$

поскольку вращение шара в идеальной жидкости не вызывает движения последней. Потенциалы $\varphi_1 + \varphi'_1$ и $\varphi_3 + \varphi'_3$ равны между собой в силу симметрии.

Рассматриваемый метод был применен для вычисления потенциала φ_1 еще Стоксом [1]. Ламб [13] приводит следующие выражения для первых „изображений“:

$$\varphi_1^{(1)} = -\frac{a^3 \cos \theta}{2 r^2}; \quad \varphi_1^{(2)} = -\frac{a^3}{4} \left(\frac{a}{2h}\right)^3 \frac{\cos \theta'}{r'^2}; \quad \varphi_1^{(3)} = -\frac{a^3}{8} \left(\frac{a}{2h}\right)^6 \frac{\cos \theta}{r^2}.*$$

Однако все авторы ограничиваются рассмотрением нескольких первых „изображений“.

Продолжая процесс образования потенциалов $\varphi_1^{(n)}$ и добавляя аналогичные потенциалы $\varphi_1'^{(n)}$, получим

$$\varphi_1 + \varphi'_1 = -\frac{a^3}{2} \left[\frac{\cos \theta}{r^2} + \frac{\cos \theta'}{r'^2} \right] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left(\frac{a}{2h}\right)^{3k}. \quad (29)$$

Ряд в (29) есть геометрическая прогрессия со знаменателем $\frac{1}{2} \left(\frac{a}{2h}\right)^3 < \frac{1}{16}$. Произведя суммирование в (29), имеем:

$$\varphi_1 + \varphi'_1 = -\frac{a^3}{2} \left[\frac{\cos \theta}{r^2} + \frac{\cos \theta'}{r'^2} \right] \left\{ 1 - \frac{1}{16} \left(\frac{a}{h}\right)^3 \right\}^{-1}. \quad (30)$$

Для вычисления потенциала $\varphi_2 + \varphi'_2$, насколько мне известно, рассматриваемый метод не применялся.

При движении шара перпендикулярно стенке вдоль оси y потенциал скоростей равен

$$\varphi_2^{(1)} = -\frac{a^3}{2} \frac{\sin \theta \cos \omega}{r^2}.$$

Будем считать, что поток, создаваемый движением шара I, вблизи поверхности шара II мало отличается от поступательного потока.

* Здесь употреблены обозначения, принятые в настоящей статье.

За скорость этого потока примем скорость точки O' при отсутствии шара II, т. е.

$$\left[\frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial y} \right]_{O'} = \left[\left(\frac{\partial y}{\partial r} \right)^{-1} \frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial r} \right]_{O'} = \left(\frac{a}{2h} \right)^3.$$

Зная скорость, сообщаемую шару II движением шара I, нетрудно вычислить все потенциалы $\varphi_2^{(n)}$ и $\varphi_2'^{(n)}$. Тогда

$$\varphi_2 + \varphi_2' = -\frac{a^3}{2} \left[\frac{\sin \theta \cos \omega}{r^2} + \frac{\sin \theta' \cos \omega'}{r'^2} \right] \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{2h}\right)^{3k}. \quad (31)$$

Ряд в (31) представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $\left(\frac{a}{2h}\right)^3 \leq \frac{1}{8}$ и, следовательно, сходится при любых a и h . Применяя формулу для суммы геометрической прогрессии, получим

$$\varphi_2 + \varphi_2' = -\frac{a^3}{2} \left[\frac{\sin \theta \cos \omega}{r^2} + \frac{\sin \theta' \cos \omega'}{r'^2} \right] \left\{ 1 - \frac{1}{8} \left(\frac{a}{h}\right)^3 \right\}^{-1}. \quad (32)$$

Совершенно аналогично можно получить приближенное выражение для потенциала скоростей, создаваемого движением круглого цилиндра бесконечной длины около стенки (при бесциркуляционном обтекании). Приведем лишь окончательный результат

$$\varphi + \varphi' = -a^3 \left[\frac{\cos \theta}{r} + \frac{\cos \theta'}{r'} \right] \left\{ 1 - \frac{1}{4} \left(\frac{a}{h}\right)^2 \right\}^{-1}, \quad (33)$$

где $\cos \theta$ есть косинус угла между радиус-вектором и вектором скорости (аналогично для $\cos \theta'$).

Краткие выводы

1. Основная трудность рассматриваемой задачи заключается в том, что граничные условия заданы на двух поверхностях.
2. Точное вычисление потенциала скоростей, если и возможно, то приведет к очень сложным выражениям, бесполезным в практических приложениях.
3. Обобщая метод Айзенберга, можно приближенно вычислить потенциалы скоростей во всех случаях, когда большая ось эллипсоида во время движения остается параллельной стенке.
4. В статье вычислены приближенно потенциалы скоростей, создаваемые движением удлиненного эллипсоида вращения вдоль одной из его экваториальных осей как параллельно, так и перпендикулярно стенке, а также потенциал скоростей, создаваемый вращением эллипсоида вокруг экваториальной оси, перпендикулярной стенке.
5. Приближенный метод применяется также к вычислению потенциала скоростей, создаваемого движением около стенки шара и круглого цилиндра бесконечной длины.
6. Все приближенные выражения для потенциалов стремятся к точным выражениям при удалении тела от стенки на бесконечно-большое расстояние.

Summary

The paper considers the motion of an ovary ellipsoid in an ideal incompressible fluid bounded by a plane wall. It is to show exact calcu-

lation of velocity potential leading as due to complicated expressions would be useless on applications. Using Eisenberg's method [10], the author gives approximations of the velocity potentials for all cases where the semimajor axis of the ellipsoid keeps parallel to the wall all through the motion.

The calculus presupposes the stream generated by the translation of ellipsoid I ("real") close to the surface of ellipsoid II ("image") differs but slightly from a translational stream.

The velocity of the particle of the fluid coinciding with the centre of ellipsoid II, admitting the latter to be absent, has been taken for the value of the velocity of the translational stream.

All the approximate solutions approach the exact solutions in the limit as the ellipsoid recedes from the wall.

ЛИТЕРАТУРА

1. Stokes. On some cases of fluid motion. Trans. of the Cambr. Phil. Soc., vol. VIII, p. 1, 1844.
2. Thomson and Tait. A Treatise on Natural Philosophy. Vol. I, Oxford, 1867.
3. C. A. Bjerknes. Hydrodynamische Fernkräfte. Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. Nr. 195, 1915.
4. W. M. Hicks. On the Motion of Two Cylinders in a Fluid. The Quarterly. J. of Math., vol. XVI, 1879.
5. W. M. Hicks. On the Motion of Two Spheres in a Fluid. Phil. Trans. of the Royal Soc., vol. 171, 1880.
6. C. Neumann. Hydrodynamische Untersuchungen. Leipzig, 1883.
7. Н. Е. Жуковский. Лекции по гидродинамике. Собр. соч., т. 2, 1949.
8. A. B. Basset. On the motion of two spheres in a liquid and allied problems. Proc. of the London Math. Soc., vol. XVIII, 1886—1887.
9. R. A. Herman. On the motion of two spheres in fluid and allied problems. The Quarterly J. of Math., 1887, vol. XXII.
10. Ph. Eisenberg. An Approximate Solution for Incompressible Flow About an Ellipsoid Near a Plane Wall. J. of Applied Mechanics, vol. 17, № 2, 1950.
11. F. C. Karal. The Motion of a Sphere Moving Parallel to a Plane Boundary. J. of Applied Physics, vol. 24, № 2, 1953.
12. T. Havelock. Ship vibrations: the virtual inertia of a spheroid in shallow water. Trans. Inst. Naval Archit., vol. 95, № 1, 1953.
13. Г. Ламб. Гидродинамика. М.—Л., Гостехиздат, 1947.

Статья поступила в редакцию 15 I 1957 г.