

В. С. Сабанеев

ПРИСОЕДИНЕННЫЕ МАССЫ * ЭЛЛИпсоИДА ВРАЩЕНИЯ, ДВИЖУЩЕГОСЯ В ЖИДКОСТИ, ОГРАНИЧЕННОЙ ПЛОСКОЙ СТЕНКОЙ

Исходя из полученных Айзенбергом [1] и автором [2] приближенных выражений для потенциалов скоростей, вычисляются коэффициенты присоединенных масс эллипсоида вращения, движущегося в идеальной несжимаемой жидкости около стенки. Зависимости коэффициентов присоединенных масс от расстояния до стенки для различных эллипсоидов представлены на графиках. Полученные результаты сравниваются с точными решениями в частных случаях шара и круглого цилиндра бесконечной длины.

§ 1. Введение

При неустановившемся движении твердого тела в идеальной несжимаемой жидкости главный вектор и главный момент сил давления, приложенных к поверхности тела, отличны от нуля. Полное воздействие жидкости на движение тела эквивалентно кажущемуся увеличению массы тела на величины, называемые присоединенными массами. Присоединенные массы эллипсоидов вращения при движении в безграничной идеальной несжимаемой жидкости давно известны. При неустановившемся движении тела в жидкости, ограниченной стенкой, наличие стенки изменяет величины присоединенных масс. Последние в этом случае зависят от расстояния между движущимся телом и стенкой и от направления движения тела по отношению к стенке.

В настоящее время зависимость величины присоединенной массы от расстояния до стенки и от направления движения известна лишь для шара и круглого цилиндра бесконечной длины. В 1953 г. Хавелок [3] предпринял попытку приближенного определения такой зависимости для эллипсоида вращения.

Для точного вычисления присоединенных масс эллипсоидов вращения, движущихся в идеальной жидкости, ограниченной стенкой, надо знать точные выражения для соответствующих потенциалов скоростей. Как показано в статье [2], точное вычисление потенциалов скоростей в этом случае представляет собой трудную и до сих пор не решенную задачу.

В 1950 г. Айзенберг [1] вычислил приближенно потенциал скоростей в частном случае движения эллипсоида вдоль большой оси параллельно стенке. Автору данной статьи удалось приближенно

* Термин «масса» употребляется в статье в обобщенном смысле, как величина, характеризующая инерционность.

здесь введены обозначения

$$\omega_{ix} \equiv \frac{\partial \omega_i}{\partial x}; \quad \omega_{iy} \equiv \frac{\partial \omega_i}{\partial y}; \quad \omega_{iz} \equiv \frac{\partial \omega_i}{\partial z}.$$

Функция Лагранжа L для единицы объема, рассматриваемая как функция переменных $x, y, z, \omega_i, \omega_{ix}, \omega_{iy}, \omega_{iz}$, имеет следующий вид:

$$L = \frac{1}{2} e^{-\text{Re}^* \varphi} \sum_{i, k=1}^3 \left[\left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x_k} \right)^2 + \text{Re}^* \omega_i \omega_k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} \right]. \quad (5,2)$$

Здесь φ — потенциал скорости, который предполагается функцией, известной из решения задачи обтекания идеальной жидкостью. Непосредственной подстановкой (5,2) в уравнение (5,1) легко убедиться, что они совпадают с векторным уравнением (2,16). Таким образом, решение системы уравнений (2,16) сводится к решению вариационной задачи

$$\int \delta L dx dy dz = 0 \quad (5,3)$$

при наложенной связи

$$\omega_{1x} + \omega_{2y} + \omega_{3z} = 0, \quad (5,4)$$

выражающей условие несжимаемости. Интеграл в (5,3) распространен по всему внешнему потоку, т. е. по всему потоку, исключая пограничный слой.

Возможность записать в Лагранжевой форме уравнение движения вязкой жидкости достигается здесь благодаря двум обстоятельствам: во-первых, благодаря линейности уравнения (2,16) в искомом поле скорости ω и, во-вторых, благодаря тому, что использованное для линеаризации основное поле скоростей потенциально.

Summary

The general expression for the force on bodies is given on the basis of the phenomenological theory of turbulence. The generalized Bernoulli—Cauchy's equation is derived. The linearization of equations in the external flow is made and it is used (by taking the boundary conditions on the infinity) for the transformation of the expression of force into the form (3,19).

The first principle of thermodynamics is used and the generalization of Umov's vector on the turbulent flows is done.

The equations of motion viscons fluid by constant external turbulence are represented in the form of Lagrange—Euler's equations of variational problem.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Невзглядов. Феноменологическая теория турбулентности. ЖЭТФ, т. 16, вып. 7, 1946, стр. 614.
2. В. Г. Невзглядов. Основания феноменологической теории турбулентности. Вестник ЛГУ, № 3, 1948, стр. 3.
3. В. Г. Невзглядов. К статистической теории турбулентности. ДАН СССР, т. XLVII, № 7, 1945, стр. 482.
4. В. Г. Невзглядов. Новый метод в динамике вязкой жидкости. ДАН СССР, т. LXXVII, № 4, 1951, стр. 573; т. LXXXII, № 2, 1952, стр. 213.

Статья поступила в редакцию 15 III 1957 г.

В. С. Сабанеев

ПРИСОЕДИНЕННЫЕ МАССЫ* ЭЛЛИпсоИДА ВРАЩЕНИЯ, ДВИЖУЩЕГОСЯ В ЖИДКОСТИ, ОГРАНИЧЕННОЙ ПЛОСКОЙ СТЕНКОЙ

Исходя из полученных Айзенбергом [1] и автором [2] приближенных выражений для потенциалов скоростей, вычисляются коэффициенты присоединенных масс эллипсоида вращения, движущегося в идеальной несжимаемой жидкости около стенки. Зависимости коэффициентов присоединенных масс от расстояния до стенки для различных эллипсоидов представлены на графиках. Полученные результаты сравниваются с точными решениями в частных случаях шара и круглого цилиндра бесконечной длины.

§ 1. Введение

При неустановившемся движении твердого тела в идеальной несжимаемой жидкости главный вектор и главный момент сил давления, приложенных к поверхности тела, отличны от нуля. Полное воздействие жидкости на движение тела эквивалентно кажущемуся увеличению массы тела на величины, называемые присоединенными массами. Присоединенные массы эллипсоидов вращения при движении в безграничной идеальной несжимаемой жидкости давно известны. При неустановившемся движении тела в жидкости, ограниченной стенкой, наличие стенки изменяет величины присоединенных масс. Последние в этом случае зависят от расстояния между движущимся телом и стенкой и от направления движения тела по отношению к стенке.

В настоящее время зависимость величины присоединенной массы от расстояния до стенки и от направления движения известна лишь для шара и круглого цилиндра бесконечной длины. В 1953 г. Хавелок [3] предпринял попытку приближенного определения такой зависимости для эллипсоида вращения.

Для точного вычисления присоединенных масс эллипсоидов вращения, движущихся в идеальной жидкости, ограниченной стенкой, надо знать точные выражения для соответствующих потенциалов скоростей. Как показано в статье [2], точное вычисление потенциалов скоростей в этом случае представляет собой трудную и до сих пор не решенную задачу.

В 1950 г. Айзенберг [1] вычислил приближенно потенциал скоростей в частном случае движения эллипсоида вдоль большой оси параллельно стенке. Автору данной статьи удалось приближенно

* Термин «масса» употребляется в статье в обобщенном смысле, как величина, характеризующая инерционность.

вычислить потенциалы скоростей во всех случаях, когда большая ось эллипсоида во время движения остается параллельной стенке [2]. Полученные приближенные выражения для потенциалов скоростей дают возможность приближенно вычислить присоединенные массы эллипсоидов вращения в тех случаях, когда большая ось эллипсоида параллельна стенке во время движения. Предлагаемые формулы для коэффициентов присоединенных масс значительно проще и точнее формул, данных Хавелоком.

§ 2. Кинетическая энергия

Рассмотрим движение удлиненного эллипсоида вращения в идеальной несжимаемой жидкости, ограниченной бесконечной плоской стенкой. Если поместить с другой стороны стенки зеркальное изображение нашего эллипсоида, то можно говорить о симметричном движении двух эллипсоидов в безграничной жидкости.

Введем две системы координат, симметричных относительно стенки:

1) систему $Oxyz$ с началом в центре эллипсоида I,

2) систему $O'x'y'z'$ с началом в центре эллипсоида II (изображения эллипсоида I).

Оси x и x' направим вдоль больших осей эллипсоидов, а оси z и z' направим параллельно стенке.

Кроме того, с каждым из эллипсоидов I и II свяжем свою систему эллиптических координат, положив

$$\begin{aligned} x &= k\mu\zeta & 1 \leq \zeta < \infty, \\ y &= \tilde{\omega} \cos \omega & -1 \leq \mu \leq +1, \\ z &= \tilde{\omega} \sin \omega & 0 \leq \omega < 2\pi, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\tilde{\omega} = k(1 - \mu^2)^{1/2}(\zeta^2 - 1)^{1/2}$; k — половина фокусного расстояния эллипсоидов.

Эллиптические координаты ζ' , μ' , ω' , связанные с эллипсоидом II, определяются аналогичными формулами.

Предположим, что существует потенциал скоростей. Кинетическая энергия жидкости, в которой движутся два твердых тела, определяется тогда по формуле

$$T_{ж} = -\frac{\rho}{2} \iint \psi \frac{\partial \psi}{\partial \nu} dS, \quad (2)$$

где ψ — потенциал скоростей; ρ — плотность жидкости; ν — внешняя нормаль к поверхности тела, а интегрирование распространяется по мгновенному положению обоих тел. В рассматриваемой задаче интеграл (2) можно представить в виде суммы двух интегралов, равных между собой в силу симметрии

$$T_{ж} = -\frac{\rho}{2} \iint_{S_I} \psi \frac{\partial \psi}{\partial \nu} dS_I - \frac{\rho}{2} \iint_{S_{II}} \psi \frac{\partial \psi}{\partial \nu} dS_{II},$$

где S_I и S_{II} — поверхности эллипсоидов I и II.

При движении одного эллипсоида в жидкости, ограниченной стенкой, в движение приводится только часть жидкости, находящаяся

с одной стороны стенки, следовательно, кинетическая энергия жидкости в этом случае в два раза меньше, чем в предыдущем

$$T_{ж}^* = \frac{1}{2} T_{ж} = -\frac{\rho}{2} \iint_{S_1} \psi \frac{\partial \psi}{\partial \nu} dS_1. \quad (3)$$

Вводя обозначение

$$\lambda_{ik} = -\rho \iint_{S_1} (\varphi_i + \varphi'_i) \frac{\partial (\varphi_k + \varphi'_k)}{\partial \nu} dS_1 \quad (4)$$

и принимая во внимание, что потенциал скоростей ψ имеет вид (формула (9) статьи [2])

$\psi = U_1(\varphi_1 + \varphi'_1) + U_2(\varphi_2 + \varphi'_2) + U_3(\varphi_3 + \varphi'_3) + U_5(\varphi_5 + \varphi'_5) + U_6(\varphi_6 + \varphi'_6)$, получим для кинетической энергии жидкости выражение

$$T_{ж}^* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \sum_{k=1}^6 \lambda_{ik} U_i U_k, \quad (5)$$

причем штрихи при знаках суммирования указывают на то, что сумма не распространяется на индекс 4.

Выражение для кинетической энергии (5) содержит 25 коэффициентов λ_{ik} . Применяя формулу Грина к объему, заключенному между поверхностью Σ (Σ — сфера большого радиуса с центром в начале координат O) и поверхностями S_1 и S_{11} , легко показать, что $\lambda_{ik} = \lambda_{ki}$. Таким образом, выражение (5) содержит не более 15 различных коэффициентов.

Покажем, что при нашем выборе системы координат некоторые из коэффициентов λ_{ik} обращаются в нуль. Рассмотрим, например, λ_{13} — коэффициент при $U_1 U_3$, предполагая при этом, что $U_2 = U_5 = U_6 = 0$. Если изменить направление скорости U_3 на противоположное, то кинетическая энергия жидкости должна остаться неизменной по соображениям симметрии. А это возможно только в том случае, когда $\lambda_{13} = 0$. Рассуждая точно таким же образом, можно показать, что все коэффициенты λ_{ik} , содержащие индексы 3 и 5 не более одного раза, равны нулю. Этому условию удовлетворяют шесть коэффициентов: λ_{13} , λ_{23} , λ_{36} , λ_{15} , λ_{25} , λ_{56} .

Таким образом, число отличных от нуля коэффициентов в выражении (5) при надлежащем выборе системы координат равно девяти, а выражение для кинетической энергии жидкости может быть приведено к виду

$$T_{ж}^* = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1,2,6} \lambda_{ik} U_i U_k + \frac{1}{2} \sum_{i,k=3,5} \lambda_{ik} U_i U_k. \quad (6)$$

В общем случае коэффициенты λ_{ik} зависят от удлинения эллипсоида (или его эксцентриситета e_0), от расстояния между его центром и стенкой и от угла между его большой осью и стенкой.

Если эллипсоид движется таким образом, что его большая ось все время остается параллельной стенке, то выражение для кинетической энергии жидкости (6) значительно упрощается. Во-первых, пропадают все члены, содержащие U_6 , поскольку $U_6 = 0$; во-вторых, коэффициенты λ_{12} и λ_{35} обращаются в нуль в силу появившейся симметрии системы относительно плоскости YOz . Доказательство последнего утверждения проводится аналогично приведенному выше для λ_{13} .

Следовательно, кинетическая энергия жидкости, в которой движется эллипсоид вращения так, что его большая ось все время параллельна стенке, определяется по формуле

$$T_{ж}^* = \frac{1}{2} (\lambda_{11} U_1^2 + \lambda_{22} U_2^2 + \lambda_{33} U_3^2 + \lambda_{55} U_5^2). \quad (7)$$

§ 3. Вычисление присоединенных масс

Коэффициенты λ_{ik} называются присоединенными массами. Коэффициенты при квадратах линейных скоростей (U_1^2 , U_2^2 , U_3^2) в выражении для кинетической энергии жидкости имеют размерность массы (в собственном смысле).

Вычислим присоединенную массу удлиненного эллипсоида вращения при движении его вдоль большой оси параллельно стенке, т. е. вычислим λ_{11} . Приближенное выражение для потенциала $\varphi_1 + \varphi'_1$ найдено Айзенбергом [1]. Полученная им формула для потенциала $\varphi_1 + \varphi'_1$, выраженная в функциях Лежандра, имеет вид

$$\varphi_1 + \varphi'_1 = -k \frac{P_1(\mu) Q_1(\zeta) + P_1(\mu') Q_1(\zeta')}{-Q_1(e_0^{-1}) - \eta^{-1} Q_1(\eta)}, \quad (8)$$

где $P_1(\mu)$, $Q_1(\zeta)$ — функции Лежандра I и II рода, связанные с координатной системой эллипсоида I; $P_1(\mu')$, $Q_1(\zeta')$ — функции Лежандра, связанные с координатной системой эллипсоида II; e_0 — эксцентриситет эллипсоида; η — постоянная, определяемая по формуле

$$\eta = \left[1 + \left(\frac{2h}{k} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (9)$$

причем h — расстояние между центром эллипсоида и стенкой; k — половина фокусного расстояния эллипсоида.

На поверхности эллипсоида S_1 должны выполняться граничные условия

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu} = l = \cos(x, \nu), \quad \frac{\partial \varphi'_1}{\partial \nu} = 0. \quad (10)$$

Подставляя выражение для потенциала (8) и значение нормальной производной на S_1 (10) в формулу (4), получим для коэффициента λ_{11} выражение

$$\lambda_{11} = \frac{\rho}{\Delta_1} \iint_{S_1} k P_1(\mu) Q_1(\zeta) l dS_1 + \frac{\rho}{\Delta_1} \iint_{S_1} k P_1(\mu') Q_1(\zeta') l dS_1, \quad (11)$$

где $\Delta_1 = -Q_1(e_0^{-1}) - \eta^{-1} Q_1(\eta)$.

Первый интеграл в выражении (11) с помощью первой формулы (1) можно представить в виде

$$\frac{\rho}{\Delta_1} \iint_{S_1} x \zeta^{-1} Q_1(\zeta) l dS_1.$$

Учитывая, что на поверхности S_1 $\zeta = e_0^{-1}$, получим

$$\rho \frac{e_0 Q_1(e_0^{-1})}{\Delta_1} \iint_{S_1} x l dS_1.$$

Полученный интеграл легко преобразовать к объемному по формуле Остроградского. После преобразования имеем:

$$\rho \frac{e_0 Q_1(e_0^{-1})}{\Delta_1} \iiint d\tau = \rho V \frac{e_0 Q_1(e_0^{-1})}{\Delta_1},$$

где $V = \frac{4}{3} \pi a b^2$ — объем эллипсоида.

Второй интеграл в (11) с помощью формул для координат соштрихами, аналогичных (1), приведем к виду

$$\frac{\rho}{\Delta_1} \iint_{S_1} x' \zeta'^{-1} Q_1(\zeta') l dS_1.$$

В рассматриваемом частном случае, когда большая ось эллипсоида во время движения параллельна стенке, между системами координат $Oxuz$ и $O'x'y'z'$ имеет место зависимость

$$x = x', \quad y + y' = 2h, \quad z = z'. \quad (12)$$

При приближенном вычислении потенциала $\varphi_1 + \varphi_1'$ [1] предполагалось, что эллипсоид I лежит на эллипсоидальной поверхности $\zeta' = \eta$, конфокальной с эллипсоидом II. Вследствие этого выражение $x' \zeta'^{-1} Q_1(\zeta')$ на поверхности S_1 принималось приближенно равным $x \eta^{-1} Q_1(\eta)$. Следовательно, второй интеграл в (11) равен

$$\rho \frac{\eta^{-1} Q_1(\eta)}{\Delta_1} \iint_{S_1} x l dS_1 = \rho V \frac{\eta^{-1} Q_1(\eta)}{\Delta_1}.$$

Суммируя полученные результаты, получаем для присоединенной массы λ_{11} выражение

$$\lambda_{11} = \rho V \frac{e_0 Q_1(e_0^{-1}) + \eta^{-1} Q_1(\eta)}{-Q_1(e_0^{-1}) - \eta^{-1} Q_1(\eta)}. \quad (13)$$

Коэффициент присоединенной массы при движении эллипсоида вращения вдоль большой оси (оси x) параллельно стенке равен

$$\kappa_1 = \frac{e_0 Q_1(e_0^{-1}) + \eta^{-1} Q_1(\eta)}{-Q_1(e_0^{-1}) - \eta^{-1} Q_1(\eta)}. \quad (14)$$

По приближенной формуле (14) проведены расчеты коэффициентов присоединенных масс κ_1 эллипсоидов вращения с соотношениями полуосей от 1:1,25 до 1:10 при различных расстояниях от стенки. Результаты этих расчетов приведены на графике (рис. 1).

Вычисление присоединенной массы λ_{33} проводится точно таким же путем с использованием приближенного выражения для потенциала $\varphi_3 + \varphi_3'$ (формула (25) статьи [2]). Приведем лишь окончательный результат вычислений.

Коэффициент присоединенной массы при движении эллипсоида вращения вдоль экваториальной оси параллельно стенке равен

$$\kappa_3 = \frac{-e_0(1 - e_0^2)^{-1/2} Q_1^1(e_0^{-1}) - (\eta^2 - 1)^{-1/2} Q_1^1(\eta)}{(1 - e_0^2)^{1/2} Q_1^1(e_0^{-1}) + (\eta^2 - 1)^{-1/2} Q_1^1(\eta)}. \quad (15)$$

Зависимость коэффициента присоединенной массы κ_3 от расстояния до стенки для эллипсоидов с различными удлинениями представлена на графике (рис. 2).

Переходим к вычислению коэффициента λ_{22} . Приближенное выражение для потенциала $\varphi_2 + \varphi_2'$ имеет вид (формула (27) статьи [2])

$$\varphi_2 + \varphi_2' = k \frac{P_1^1(\mu) Q_1^1(\zeta) \cos \omega + P_1^1(\mu') Q_1^1(\zeta') \cos \omega'}{(1 - e_0^2)^{1/2} Q_1^1(e_0^{-1}) - \eta^{-1} (\eta^2 - 1)^{1/2} Q_1^1(\eta)}. \quad (16)$$

На поверхности эллипсоида S_1 должны выполняться граничные условия

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \nu} = m = \cos(\nu, \nu), \quad \frac{\partial \varphi_2'}{\partial \nu} = 0. \quad (17)$$

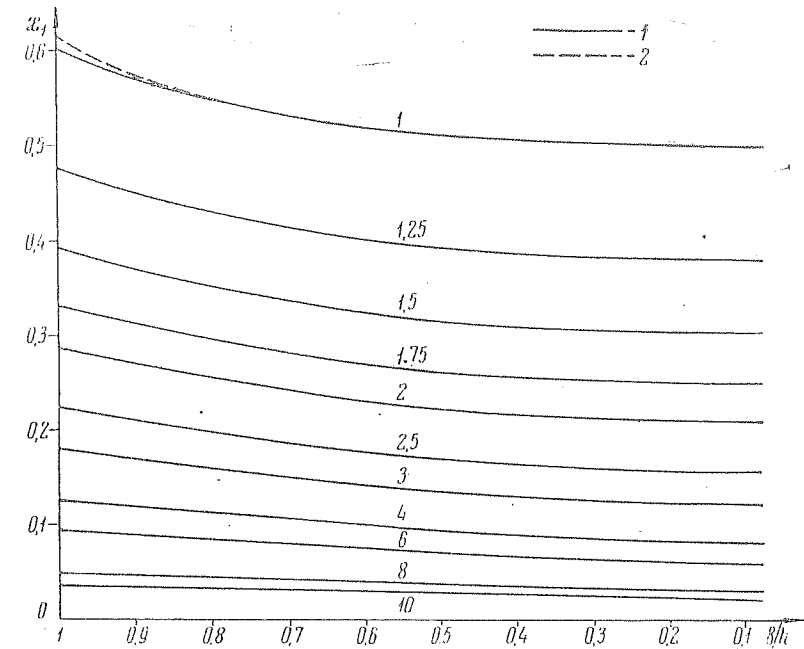


Рис. 1. Зависимость коэффициента присоединенной массы κ_1 от расстояния до стенки: 1 — приближенное решение, 2 — точное решение. Цифры над кривыми показывают соотношение полуосей эллипсоида.

Подставляя выражение для потенциала (16) и значение нормальной производной на S_1 (17) в формулу (4), получим для коэффициента λ_{22} выражение

$$\lambda_{22} = -\frac{\rho}{\Delta_2} \iint_{S_1} k P_1^1(\mu) Q_1^1(\zeta) \cos \omega \cdot m dS_1 - \frac{\rho}{\Delta_2} \iint_{S_1} k P_1^1(\mu') Q_1^1(\zeta') \cos \omega' \cdot m dS_1, \quad (18)$$

где $\Delta_2 = (1 - e_0^2)^{1/2} Q_1^1(e_0^{-1}) - \eta^{-1} (\eta^2 - 1)^{1/2} Q_1^1(\eta)$.

Первый интеграл в (18) может быть представлен в виде

$$-\frac{\rho}{\Delta_2} \iint_{S_1} y (\zeta^2 - 1)^{-1/2} Q_1^1(\zeta) m dS_1 = -\rho \frac{e_0 (1 - e_0^2)^{-1/2} Q_1^1(e_0^{-1})}{\Delta_2} \iint_{S_1} y m dS_1$$

и после перехода к объемному интегралу легко вычисляется и равен

$$-\rho V \frac{e_0(1 - e_0^2)^{-1/2} Q_1^1(e_0^{-1})}{\Delta_2}$$

Второй интеграл в (18) с помощью формулы Остроградского преобразуем к объемному

$$-\frac{\rho}{\Delta_2} \iiint \frac{\partial}{\partial y} [kP_1^1(\mu') Q_1^1(\zeta') \cos \omega'] d\tau.$$

Подынтегральное выражение в последнем интеграле представляет собой с точностью до постоянного множителя проекции на ось y скоростей, создаваемых движением эллипсоида II вдоль оси y .

При вычислении потенциала $\varphi_2 + \varphi'_2$ предполагалось, что поток, создаваемый движением эллипсоида II, вблизи поверхности эллипсоида I мало отличается от поступательного потока. За скорость поступательного потока принималась скорость частицы жидкости, совпадающей с центром O эллипсоида I в предположении, что последний отсутствует. Следовательно, можно считать приближенно, что производная в подынтегральном выражении сохраняет постоянное значение во всем объеме эллипсоида I, равное ее значению в центре O эллипсоида I, т. е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} [kP_1^1(\mu') Q_1^1(\zeta') \cos \omega'] &= \frac{\partial}{\partial y} [kP_1^1(\mu') Q_1^1(\zeta') \cos \omega']_0 = \\ &= -\frac{\partial}{\partial y'} [kP_1^1(\mu') Q_1^1(\zeta') \cos \omega']_0 = -\eta^{-1}(\eta^2 - 1)^{1/2} \dot{Q}_1^1(\eta). \end{aligned}$$

Таким образом, второй интеграл в (18) равен

$$\rho V \frac{\eta^{-1}(\eta^2 - 1)^{1/2} \dot{Q}_1^1(\eta)}{\Delta_2}$$

Суммируя полученные результаты, найдем выражение для присоединенной массы λ_{22} . Коэффициент присоединенной массы при движении эллипсоида вращения вдоль экваториальной оси (оси y) перпендикулярно стенке равен

$$\lambda_{22} = \frac{-e_0(1 - e_0^2)^{-1/2} Q_1^1(e_0^{-1}) + \eta^{-1}(\eta^2 - 1)^{1/2} \dot{Q}_1^1(\eta)}{(1 - e_0^2)^{1/2} Q_1^1(e_0^{-1}) - \eta^{-1}(\eta^2 - 1)^{1/2} \dot{Q}_1^1(\eta)} \quad (19)$$

Результаты расчета коэффициентов присоединенных масс для различных эллипсоидов приведены на графике (рис. 3).

§ 4. Вычисление присоединенного момента инерции

Коэффициенты при квадратах угловых скоростей (U_5^2, U_6^2) в выражении для кинетической энергии жидкости имеют размерность момента инерции. Поэтому коэффициенты $\lambda_{55}, \lambda_{66}$ могут быть названы присоединенными моментами инерции.

Вычислим присоединенный момент инерции удлиненного эллипсоида вращения при вращении его вокруг экваториальной оси, перпендикулярной стенке (оси y), т. е. вычислим λ_{55} . Приближенное выражение для потенциала $\varphi_5 + \varphi'_5$ приведено в статье [2] формула (28)

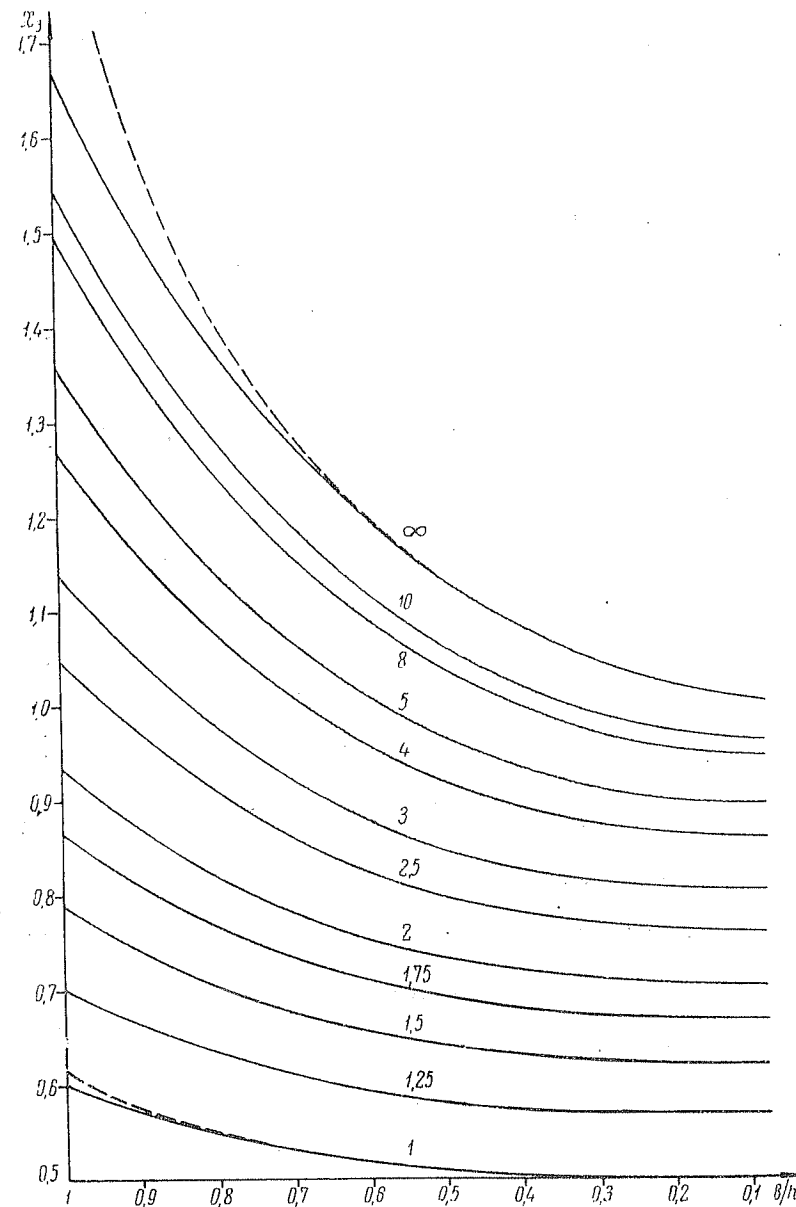


Рис. 2. Зависимость коэффициента присоединенной массы λ_3 от расстояния до стенки.

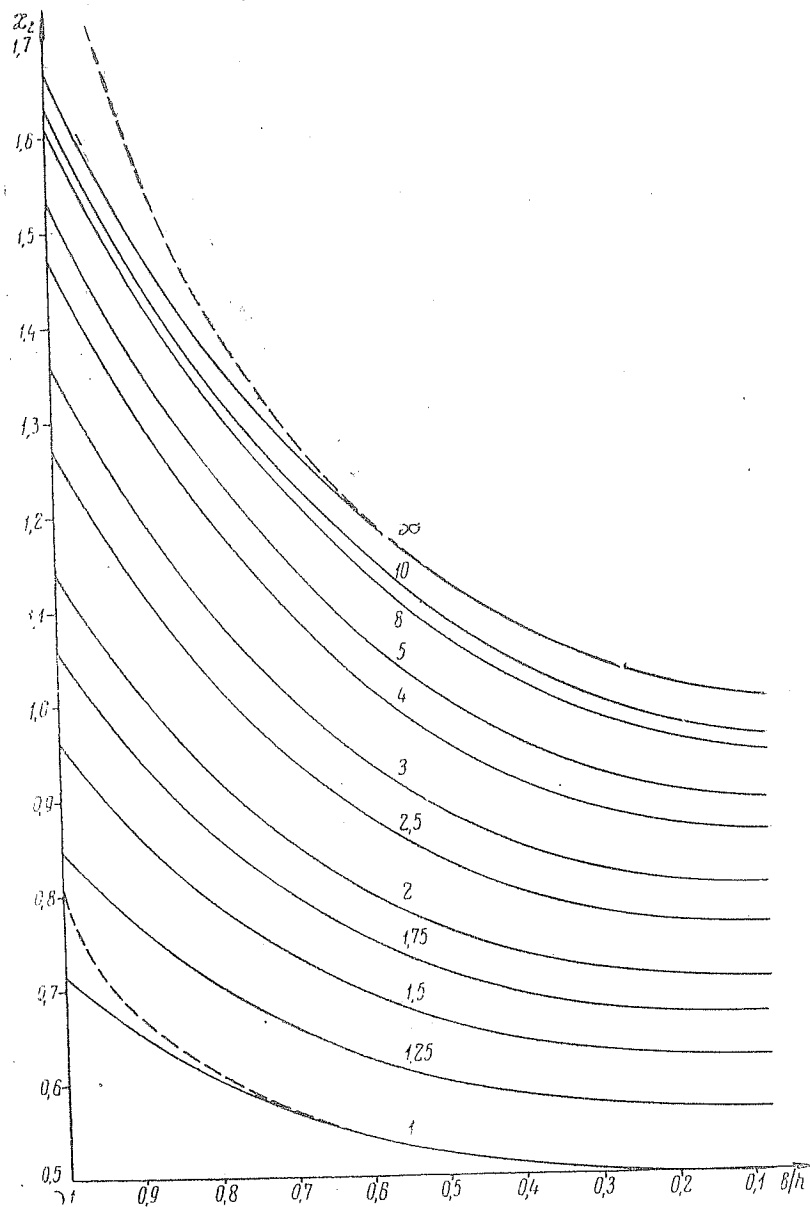


Рис. 3. Зависимость коэффициента присоединенной массы λ_2 от расстояния до стенки.

$$\varphi_5 + \varphi'_5 = -\frac{k^2}{3} \frac{e_0^2}{2 - e_0^2} \frac{P_2^1(\mu) Q_2^1(\zeta) \sin \omega + P_2^1(\mu') Q_2^1(\zeta') \sin \omega'}{e_0(2 - e_0^2)^{-1} (1 - e_0^2)^{1/2} Q_2^1(e_0^{-1}) + \eta^{-1} (\eta^2 - 1)^{-1/2} Q_2^1(\eta)} \quad (20)$$

Граничные условия на поверхности S_1 имеют вид

$$\frac{\partial \varphi_5}{\partial \nu} = zl - xn, \quad \frac{\partial \varphi'_5}{\partial \nu} = 0. \quad (21)$$

Подставим выражение для потенциала (20) и значение нормальной производной на S_1 (21) в формулу (4). Тогда для коэффициента λ_{55} получим выражение

$$\lambda_{55} = \frac{\rho}{3\Delta_5} \cdot \frac{e_0^2}{2 - e_0^2} \iint_{S_1} k^2 P_2^1(\mu) Q_2^1(\zeta) \sin \omega \cdot (zl - xn) dS_1 + \frac{\rho}{3\Delta_5} \cdot \frac{e_0^2}{2 - e_0^2} \iint_{S_1} k^2 P_2^1(\mu') Q_2^1(\zeta') \sin \omega' \cdot (zl - xn) dS_1, \quad (22)$$

где $\Delta_5 = e_0(2 - e_0^2)^{-1} (1 - e_0^2)^{1/2} Q_2^1(e_0^{-1}) + \eta^{-1} (\eta^2 - 1)^{-1/2} Q_2^1(\eta)$.

С помощью формул (1) первый интеграл приведем к виду

$$\frac{\rho}{\Delta_5} \frac{e_0^2}{2 - e_0^2} \iint_{S_1} xz \zeta^{-1} (\zeta^2 - 1)^{-1/2} Q_2^1(\zeta) (zl - xn) dS_1.$$

Учитывая, что на поверхности S_1 $\zeta = e_0^{-1}$, и преобразуя интеграл к объемному по формуле Остроградского, получим

$$\frac{\rho}{\Delta_5} \frac{e_0^2}{2 - e_0^2} e_0^2 (1 - e_0^2)^{-1/2} Q_2^1(e_0^{-1}) \iiint_V (z^2 - x^2) d\tau.$$

Вычисляя объемный интеграл, получаем для первого интеграла в (22) выражение

$$-\frac{1}{5} (a^2 - b^2) \frac{e_0^2}{2 - e_0^2} \frac{\rho V}{\Delta_5} e_0^2 (1 - e_0^2)^{-1/2} Q_2^1(e_0^{-1}).$$

Проводя теперь точно такие же преобразования со вторым интегралом в (22) и учитывая, что при вычислении потенциала $\varphi_5 + \varphi'_5$ на поверхности S_1 мы принимали приближенно

$$x'z'\zeta'^{-1} (\zeta'^2 - 1)^{-1/2} Q_2^1(\zeta') \approx xz\eta^{-1} (\eta^2 - 1)^{-1/2} Q_2^1(\eta),$$

найдем для второго интеграла в (22) выражение

$$-\frac{1}{5} (a^2 - b^2) \frac{e_0^2}{2 - e_0^2} \frac{\rho V}{\Delta_5} \eta^{-1} (\eta^2 - 1)^{-1/2} Q_2^1(\eta).$$

Следовательно, присоединенный момент инерции при вращении эллипсоида вокруг оси y равен

$$\lambda_{55} = \frac{1}{5} (a^2 - b^2) \rho V \frac{e_0^2}{2 - e_0^2} \times \frac{-e_0^2 (1 - e_0^2)^{-1/2} Q_2^1(e_0^{-1}) - \eta^{-1} (\eta^2 - 1)^{-1/2} Q_2^1(\eta)}{e_0(2 - e_0^2)^{-1} (1 - e_0^2)^{1/2} Q_2^1(e_0^{-1}) + \eta^{-1} (\eta^2 - 1)^{-1/2} Q_2^1(\eta)}. \quad (23)$$

Момент инерции массы жидкости в объеме эллипсоида относительно оси y равен, как известно,

$$\frac{4}{15} \pi (a^2 + b^2) ab^2 \rho = \frac{1}{5} (a^2 + b^2) \rho V.$$

Относя присоединенный момент инерции (23) к моменту инерции массы жидкости в объеме эллипсоида относительно той же оси, получим для коэффициента присоединенного момента инерции χ_5 выражение

$$\chi_5 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cdot \frac{e_0^2}{2 - e_0^2} \cdot \frac{-e_0^2 (1 - e_0^2)^{-1/2} Q_2^1(e_0^{-1}) - \eta^{-1} (\eta^2 - 1)^{-1/2} Q_2^1(\eta)}{e_0 (2 - e_0^2)^{-1} (1 - e_0^2)^{1/2} Q_2^1(e_0^{-1}) + \eta^{-1} (\eta^2 - 1)^{-1/2} Q_2^1(\eta)}.$$

Нетрудно убедиться непосредственной подстановкой в следующем тождестве:

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{e_0^2}{2 - e_0^2}.$$

Следовательно, коэффициент присоединенного момента инерции относительно экваториальной оси эллипсоида, перпендикулярной к стенке, равен

$$\chi_5 = \left(\frac{e_0^2}{2 - e_0^2} \right)^2 \cdot \frac{-e_0^2 (1 - e_0^2)^{-1/2} Q_2^1(e_0^{-1}) - \eta^{-1} (\eta^2 - 1)^{-1/2} Q_2^1(\eta)}{e_0 (2 - e_0^2)^{-1} (1 - e_0^2)^{1/2} Q_2^1(e_0^{-1}) + \eta^{-1} (\eta^2 - 1)^{-1/2} Q_2^1(\eta)}. \quad (24)$$

По приближенной формуле (24) вычислены коэффициенты присоединенного момента инерции χ_5 для некоторых эллипсоидов вращения при различных расстояниях от стенки. Результаты этих вычислений приведены на графике (рис. 4).

Отметим некоторые общие свойства выведенных приближенных формул для коэффициентов присоединенных масс χ_i :

1) Все приближенные выражения для коэффициентов χ_i стремятся к точным выражениям при удалении эллипсоида на бесконечно большое расстояние от стенки. Действительно, при $\eta \rightarrow \infty$ члены, зависящие от η , стремятся к нулю, а отношение членов, зависящих от e_0 , представляет собой точное выражение для соответствующего коэффициента присоединенной массы (или момента инерции) эллипсоида вращения в безграничной жидкости [4], [10].

2) Все выражения для коэффициентов χ_i имеют одинаковую структуру. Члены, зависящие от η , т. е. от удаленности эллипсоида от стенки, в числителе и знаменателе равны между собой по абсолютной величине, но имеют противоположные знаки. Такая структура приближенных формул весьма удобна для вычислений.

§ 5. Сравнение приближенных формул с точными в частных случаях шара и круглого цилиндра

Насколько известно автору, единственной работой, в которой приводятся формулы для присоединенных масс эллипсоидов вращения, движущихся вблизи стенки, является работа Хавелока [3]. Однако формулы, полученные в этой работе, по словам самого Хавелока, приводят к очень трудоемким вычислениям. Поэтому сравнить полученные результаты и определить величину расхождения для различных эллипсоидов представляется затруднительным. В связи с этим ограничимся сравнением результатов в двух предельных случаях, а именно

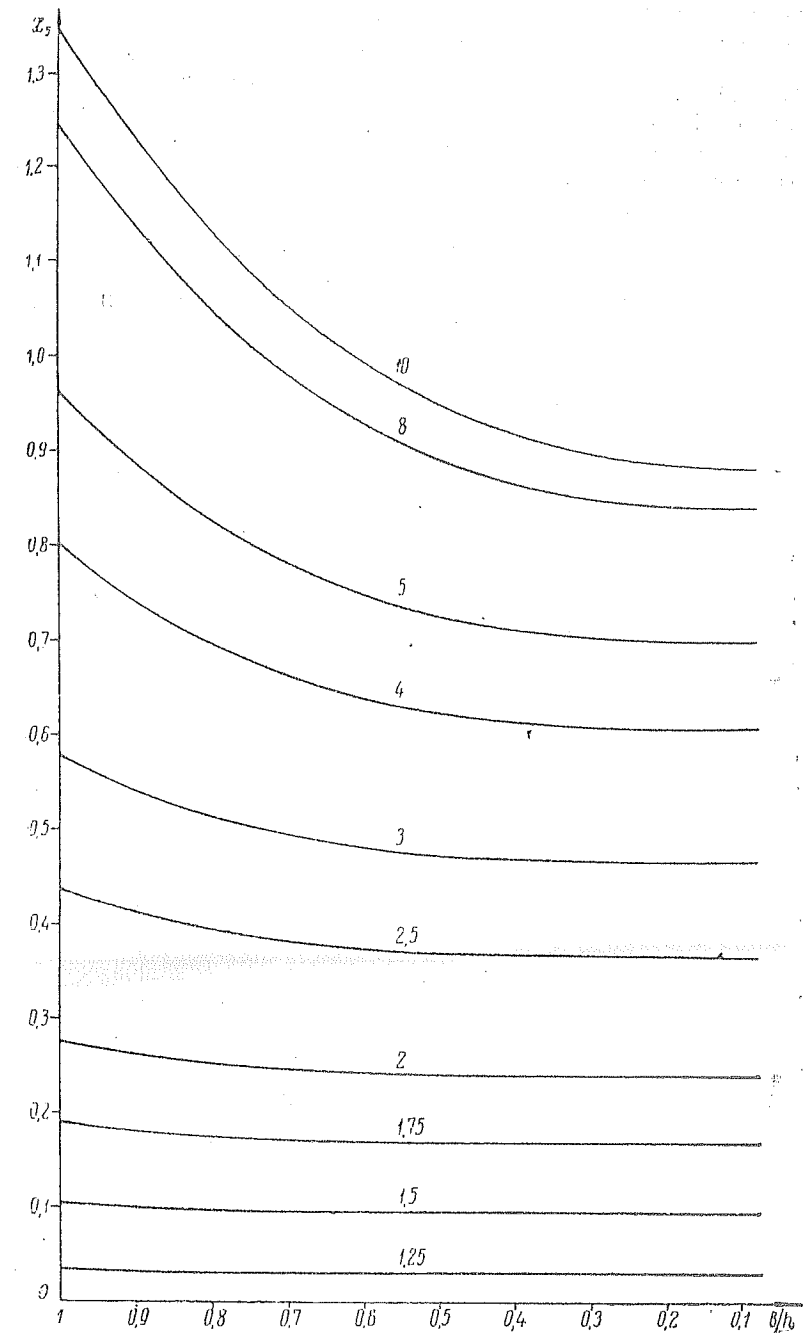


Рис. 4. Зависимость коэффициента присоединенного момента инерции χ_5 от расстояния до стенки.

в случае шара и в случае круглого цилиндра бесконечной длины, для которых известно точное решение задачи.

Точное решение задачи о двух шарах, движущихся вдоль линии, соединяющей их центры, дано в работах Хикса [5], Германа [6], Бассе [7] и Неймана [8]. В частном случае, когда шар движется вдоль оси, перпендикулярной к стенке, для кинетической энергии жидкости получается выражение

$$T_{\text{ж}} = \frac{1}{4} \rho V \left\{ 1 + 3(1 - q^2)^3 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{q^k}{1 - q^{2k+2}} \right)^3 \right\} U_2^2, \quad (25)$$

где $q = a^{-1}(h - \sqrt{h^2 - a^2})$; a — радиус шара; h — расстояние от центра шара до стенки.

Разлагая (25) в ряд по степеням обратного расстояния до стенки, получим с точностью до h^{-12}

$$T_{\text{ж}} = \frac{1}{4} \rho V \left(1 + \frac{3}{2^3} \delta^3 + \frac{3}{2^6} \delta^6 + \frac{9}{2^8} \delta^8 + \frac{3}{2^9} \delta^9 + \frac{9}{2^{10}} \delta^{10} + \frac{9}{2^{10}} \delta^{11} + \frac{33}{2^{12}} \delta^{13} + \dots \right) U_2^2, \quad (26)$$

где $\delta = \frac{a}{h}$.

Таким образом, коэффициент присоединенной массы при движении шара вдоль оси, перпендикулярной стенке, равен

$$\kappa_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{2^3} \delta^3 + \frac{3}{2^6} \delta^6 + \frac{9}{2^8} \delta^8 + \dots \right). \quad (27)$$

Вычислим теперь кинетическую энергию жидкости, исходя из приближенного значения соответствующего потенциала скоростей, вычисленного в статье [2], формула (32),

$$\varphi_2 + \varphi_2' = -\frac{a^3}{2} \left[\frac{\sin \theta \cos \omega}{r^2} + \frac{\sin \theta' \cos \omega'}{r'^2} \right] \left(1 - \frac{1}{8} \delta^3 \right)^{-1}.$$

Тогда для кинетической энергии жидкости получим выражение

$$\tilde{T}_{\text{ж}} = \frac{a^3}{4} \left(1 - \frac{1}{8} \delta^3 \right)^{-1} \rho U_2^2 \iint_{S_1} \left[\frac{\sin \theta \cos \omega}{r^2} + \frac{\sin \theta' \cos \omega'}{r'^2} \right] m dS_1.$$

Первое слагаемое после интегрирования дает

$$\frac{a^3}{4} \left(1 - \frac{1}{8} \delta^3 \right)^{-1} \rho U_2^2 \iint_{S_1} \frac{y}{a^3} m dS_1 = \frac{1}{4} \rho V \left(1 - \frac{1}{8} \delta^3 \right)^{-1} U_2^2.$$

Вторую часть интеграла преобразуем к объемному интегралу

$$\frac{a^3}{4} \left(1 - \frac{1}{8} \delta^3 \right)^{-1} \rho U_2^2 \iiint_{\tau} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\sin \theta' \cos \omega'}{r'^2} \right) d\tau.$$

Как уже говорилось выше, можно считать приближенно, что производная в подынтегральном выражении сохраняет постоянное значение во всем объеме шара, равное ее значению в центре O шара, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\sin \theta' \cos \omega'}{r'^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\sin \theta' \cos \omega'}{r'^2} \right)_0 = -\frac{\partial r'}{\partial y'} \cdot \frac{\partial}{\partial r'} \left(\frac{\sin \theta' \cos \omega'}{r'^2} \right)_0$$

и вторая часть интеграла приближенно равна

$$\frac{1}{4} \rho V \left(1 - \frac{1}{8} \delta^3 \right)^{-1} \frac{1}{4} \delta^3 U_2^2.$$

Таким образом, кинетическая энергия жидкости в данном случае может быть выражена приближенно в виде

$$\tilde{T}_{\text{ж}} = \frac{1}{4} \rho V \left(1 + \frac{1}{4} \delta^3 \right) \left(1 - \frac{1}{8} \delta^3 \right)^{-1} U_2^2.$$

Коэффициент присоединенной массы при движении шара вдоль оси, перпендикулярной к стенке, приближенно равен

$$\tilde{\kappa}_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{4} \delta^3 \right) \left(1 - \frac{1}{8} \delta^3 \right)^{-1} \quad (28)$$

или

$$\tilde{\kappa}_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{2^3} \delta^3 + \frac{3}{2^6} \delta^6 + \frac{3}{2^9} \delta^9 + \dots \right). \quad (28a)$$

Сравнивая формулы (27) и (28a), убеждаемся в хорошем совпадении приближенного решения с точным. Первые три члена разложения одинаковы и расхождение начинается лишь с δ^8

$$\kappa_2 - \tilde{\kappa}_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{9}{2^8} \delta^8 + \frac{9}{2^9} \delta^{10} + \frac{9}{2^{10}} \delta^{11} + \dots \right).$$

Вычисления показывают, что при $\delta \leq 0,9$ ошибка не превышает 3% (рис. 3).

В случае, когда шары движутся перпендикулярно линии, соединяющей их центры, потенциал скоростей, а следовательно, и кинетическая энергия, могут быть найдены с любой наперед заданной степенью точности [6], [7]. В частном случае, когда один шар движется параллельно стенке, для кинетической энергии жидкости получаем выражение

$$T_{\text{ж}} = \frac{1}{4} \rho V \left(1 + \frac{3}{2^4} \delta^3 + \frac{3}{2^8} \delta^6 + \frac{3}{2^8} \delta^8 + \frac{3}{2^{12}} \delta^9 + \frac{27}{2^{12}} \delta^{10} + \frac{3}{2^{11}} \delta^{11} + \frac{195}{2^{16}} \delta^{12} + \dots \right) (U_1^2 + U_3^2).$$

Коэффициент присоединенной массы при движении шара параллельно стенке равен

$$\kappa_1 = \kappa_3 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{2^4} \delta^3 + \frac{3}{2^8} \delta^6 + \frac{3}{2^8} \delta^8 + \frac{3}{2^{12}} \delta^9 + \dots \right). \quad (29)$$

Вычислим кинетическую энергию жидкости в данном случае, исходя из приближенного выражения для потенциала скоростей (формула (30) статьи [2])

$$\varphi_1 + \varphi_1' = -\frac{a^3}{2} \left[\frac{\cos \theta}{r^2} + \frac{\cos \theta'}{r'^2} \right] \left(1 - \frac{1}{16} \delta^3 \right)^{-1}.$$

Тогда для кинетической энергии жидкости получим выражение

$$\tilde{T}_{\text{ж}} = \frac{a^3}{4} \left(1 - \frac{1}{16} \delta^3 \right)^{-1} \rho (U_1^2 + U_3^2) \iint_{S_1} \left[\frac{\cos \theta}{r^2} + \frac{\cos \theta'}{r'^2} \right] m dS_1.$$

Первый член после интегрирования дает

$$\frac{1}{4} \rho V \left(1 - \frac{1}{16} \delta^3 \right)^{-1} (U_1^2 + U_3^2).$$

Производя замену $r' \cos \theta' = r \cos \theta$ (поскольку $x' = x$) и считая, что на поверхности шара $S_1 r' \approx 2h$, получим вторую часть интеграла

$$\frac{1}{4} \rho V \left(1 - \frac{1}{16} \delta^3\right)^{-1} (U_1^2 + U_3^2) \frac{1}{8} \delta^3.$$

Следовательно, кинетическая энергия жидкости при движении шара параллельно стенке приближенно равна

$$\tilde{T}_{ж} = \frac{1}{4} \rho V \left(1 + \frac{1}{8} \delta^3\right) \left(1 - \frac{1}{16} \delta^3\right)^{-1} (U_1^2 + U_3^2).$$

Для коэффициента присоединенной массы получаем выражение

$$\tilde{\kappa}_1 = \tilde{\kappa}_3 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{8} \delta^3\right) \left(1 - \frac{1}{16} \delta^3\right)^{-1} \quad (30)$$

или

$$\tilde{\kappa}_1 = \tilde{\kappa}_3 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{24} \delta^3 + \frac{3}{28} \delta^6 + \frac{3}{212} \delta^9 + \dots\right). \quad (30a)$$

Расчеты коэффициентов присоединенной массы по формулам (29) и (30) показывают хорошее совпадение результатов. Как и в предыдущем случае, первые три члена разложения одинаковы, и расхождение начинается лишь с δ^8

$$\tilde{\kappa}_1 - \tilde{\kappa}_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{28} \delta^8 + \frac{27}{212} \delta^{10} + \frac{3}{211} \delta^{11} + \dots\right).$$

Заметим, что при $\delta \leq 0,9$ ошибка не превышает 0,7% (рис. 1).

Полученные результаты показывают, что вышеизложенным приближенным методом можно получить точно два первых члена, учитывающих влияние стенки, в выражении для кинетической энергии жидкости. Обычно считалось, что этим методом можно получить точно лишь один член, учитывающий влияние стенки (см. [10], примечание на стр. 166). Следует отметить также, что вычисления по формулам (28) и (30) дают результаты более точные, чем вычисления с учетом только первых трех членов разложения.

Первое точное решение задачи о движении в жидкости двух круглых цилиндров бесконечной длины, оси которых параллельны, дано в работе Хикса [9]. В частном случае, когда один цилиндр движется в жидкости, ограниченной плоской стенкой, Хикс получает для кинетической энергии жидкости выражение

$$T_{ж} = \frac{1}{2} \rho \pi a^2 \left\{ 1 + 2 \left(\frac{1}{\theta_2} - \theta_2\right)^2 \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{\theta_2^m}{1 - \theta_2^{2m}}\right)^2 \right\} (U_1^2 + U_2^2), \quad (31)$$

где $\theta_2 = a^{-1} (h - \sqrt{h^2 - a^2})$; a — радиус цилиндра; h — расстояние от оси цилиндра до стенки.

Величина кинетической энергии вычислена здесь и ниже на единицу длины цилиндра.

Разлагая (31) в ряд по степеням обратного расстояния до стенки, получим с точностью до h^{-12}

$$T_{ж} = \frac{1}{2} \rho \pi a^2 \left(1 + \frac{1}{2} \delta^2 + \frac{1}{28} \delta^4 + \frac{3}{25} \delta^6 + \frac{1}{24} \delta^8 + \frac{23}{29} \delta^{10} + \frac{71}{211} \delta^{12} + \dots\right) (U_1^2 + U_2^2). \quad (32)$$

Коэффициент присоединенной массы при движении цилиндра около стенки равен

$$\kappa = 1 + \frac{1}{2} \delta^2 + \frac{1}{28} \delta^4 + \frac{3}{25} \delta^6 + \frac{1}{24} \delta^8 + \dots \quad (33)$$

Если вычислить кинетическую энергию жидкости, исходя из приближенного выражения для потенциала скоростей (формула (33) статьи [2]), то получим

$$\tilde{T}_{ж} = \frac{1}{2} \rho \pi a^2 (U_1^2 + U_2^2) \left(1 + \frac{1}{4} \delta^2\right) \left(1 - \frac{1}{4} \delta^2\right)^{-1}.$$

Коэффициент присоединенной массы цилиндра приближенно равен

$$\tilde{\kappa} = \left(1 + \frac{1}{4} \delta^2\right) \left(1 - \frac{1}{4} \delta^2\right)^{-1} \quad (34)$$

или

$$\tilde{\kappa} = 1 + \frac{1}{2} \delta^2 + \frac{1}{28} \delta^4 + \frac{1}{25} \delta^6 + \frac{1}{27} \delta^8 + \dots \quad (34a)$$

В формулах (33) и (34a) совпадают первые три члена. Расхождение начинается с δ^6 и равно

$$\kappa - \tilde{\kappa} = \frac{1}{24} \delta^6 + \frac{7}{27} \delta^8 + \frac{11}{28} \delta^{10} + \dots$$

По формулам (33) и (34) проведены расчеты коэффициентов κ и $\tilde{\kappa}$. Результаты расчетов приведены на графиках (рис. 2 и 3). При $\delta \leq 0,85$ ошибка при пользовании приближенной формулой (34) не превышает 3%.

В заключение сравним предложенные формулы для коэффициентов присоединенных масс с формулами Хавелока [3]. Последние дают один верный член, учитывающий влияние стенки для шара. Для цилиндра же они не дают даже одного верного члена. Следовательно, формулы Хавелока дают в первом приближении решение задачи для эллипсоидов, близких по форме к шару. Предлагаемые автором формулы, как было показано, дают два верных члена как для шара, так и для цилиндра. Таким образом, предлагаемое решение может рассматриваться как решение задачи во втором приближении для любых эллипсоидов вращения.

Краткие выводы

1. В статье выведены приближенные формулы для определения присоединенных масс эллипсоидов вращения, движущихся в идеальной несжимаемой жидкости около стенки, в тех случаях, когда большая ось эллипсоида во время движения параллельна стенке.

2. Полученные приближенные формулы сравниваются с точными в двух предельных случаях, в случае шара и в случае круглого цилиндра бесконечной длины. При этом оказывается, что при $\delta \leq 0,85$ ошибка в любом случае не превышает 3% и быстро убывает с уменьшением δ (по крайней мере, как δ^6).

3. Все приближенные выражения для коэффициентов присоединенных масс стремятся к точным выражениям при удалении эллипсоида на бесконечно большое расстояние от стенки.

4. Проведенные расчеты показывают, что влияние стенки при неустановившемся движении эллипсоида в жидкости практически перестает сказываться при $h > 10b$, где b — экваториальная полуось эллип-

соида. При $h = 5b$ в любом случае присоединенная масса увеличивается не более чем на 2%.

5. Наиболее резкое увеличение присоединенных масс начинается при приближении эллипсоида к стенке на расстояние, меньшее $2b - 2,5b$. Наличие стенки увеличивает присоединенные массы в 1,5—2 раза при h , близком к b .

Summary

The paper considers the unsteady motion of an ovary ellipsoid in an ideal incompressible fluid bounded by a plane wall. The induced masses are calculated using the approximate expressions for the velocity potentials given by Eisenberg [1] and the author.

The induced mass coefficients are calculated for all cases where the semimajor axis of the ellipsoid keeps parallel to the wall all through the motion. The values of these coefficients for the different ellipsoids are presented on the diagrams.

The obtained approximate solutions are compared with the exact ones in two limiting cases, in the case of sphere and in that of circular infinite cylinder. All the approximate solutions approach the exact ones in the limit as the ellipsoid recedes from the wall.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ph. Eisenberg. An approximate solution for incompressible flow about an ellipsoid near a plane wall. *Journal of applied mechanics*, vol. 17, № 2, 1950.
2. В. С. Сабанеев. О движении эллипсоида вращения в жидкости, ограниченной плоской стенкой. *Вестник ЛГУ*, № 13, 1958.
3. T. H. Havelock. Ship vibrations: the virtual inertia of a spheroid in shallow water. *Quart. trans. Inst. naval archit.*, vol. 95, № 1, 1953.
4. И. С. Риман и Р. Л. Крепс. Присоединенные массы тел различной формы. *Тр. ЦАГИ*, № 635, 1947.
5. W. M. Hicks. On the motion of two spheres in a fluid. *Phil. trans. of the Royal soc.*, vol. 171, 1880.
6. R. A. Hermann. On the motion of two spheres in fluid and allied problems. *The quarterly J. of math.*, vol. XXII, 1887.
7. A. B. Basset. On the motion of two spheres in a liquid, and allied problems. *Proc. of the London math. soc.*, vol. XVIII, 1886—1887.
8. C. Neumann. *Hydrodynamische Untersuchungen*. Leipzig, 1883.
9. W. M. Hicks. On the motion of two cylinders in a fluid. *The quarterly J. of math.*, vol. XVI, 1879.
10. Г. Ламб. *Гидродинамика*. М.—Л., Гостехиздат, 1947.

Автор просит обратить внимание на то, что в его предыдущей статье (*Вестник ЛГУ* № 13, 1958) допущены опечатки. На стр. 141 и 142 в выражениях для первых двух компонент скорости точки O' пропущены соответствующие коэффициенты Ляме.

Статья поступила в редакцию 13 I 1957 г.