

В. С. Сабанеев

ПРИСОЕДИНЕННЫЕ МАССЫ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА
ПРИ ДВИЖЕНИИ В ЖИДКОСТИ, ОГРАНИЧЕННОЙ ПЛОСКОЙ
СТЕНКОЙ ИЛИ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

В статье рассматривается плоская задача о движении эллиптического цилиндра в идеальной жидкости, ограниченной плоской стенкой или свободной поверхностью. Вычислены приближенно потенциалы скоростей в частных случаях, когда большая ось сечения цилиндра во время движения параллельна стенке. Получены приближенные зависимости коэффициентов присоединенных масс от расстояния до стенки или до свободной поверхности.

§ 1. Постановка задачи

Задача о движении эллиптического цилиндра в идеальной несжимаемой жидкости, ограниченной плоской стенкой, гидродинамически эквивалентна задаче о движении в безграничной жидкости двух эллиптических цилиндров, являющихся зеркальным изображением друг друга и движущихся симметрично относительно стенки. Проекции скоростей цилиндров на стенку должны быть равны как по величине, так и по направлению, а проекции скоростей цилиндров на направление, перпендикулярное к стенке, должны быть равны по величине, но противоположны по направлению.

Если эллиптический цилиндр движется в жидкости, ограниченной свободной поверхностью, то мы будем предполагать характер движения таким, что силами тяжести можно пренебречь по сравнению с силами инерции. Иными словами, будем рассматривать случаи движения, для которых число Фруда весьма велико. Как известно, в этих случаях граничное условие на свободной поверхности принимает вид $\Phi^* = 0$, (Φ^* — потенциал скоростей), что позволяет продолжить аналитическую функцию Φ^* через свободную поверхность. При этом оказывается, что в точках, симметричных относительно свободной поверхности, проекции скоростей на эту поверхность должны быть равны по величине, но противоположны по направлению, а проекции скоростей на направление, перпендикулярное к свободной поверхности, должны быть равны как по величине, так и по направлению. Этим условиям можно удовлетворить, помещая в каждый момент времени с другой стороны поверхности зеркальное изображение нашего цилиндра и заставляя его двигаться с определенной скоростью.

Таким образом, задача о движении цилиндра под свободной поверхностью (при наших предположениях) также представляет собой частный случай задачи о движении двух цилиндров в безграничной жидкости. Рассматриваемые задачи отличаются друг от друга только направлением движения „изображения“.

При решении задачи о движении двух тел в жидкости потенциал скоростей целесообразно искать в виде

$$\Phi = \varphi + \varphi',$$

где φ — потенциал скоростей, создаваемый движением первого цилиндра в предположении, что второй („изображение“) неподвижен; φ' — потенциал скоростей, создаваемый движением второго цилиндра в предположении, что первый неподвижен.

Потенциалы φ и φ' должны удовлетворять уравнению неразрывности во всем пространстве, заполненном жидкостью:

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad \nabla^2 \varphi' = 0;$$

граничным условиям на поверхности первого цилиндра:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = v_n, \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial n} = 0;$$

граничным условиям на поверхности второго цилиндра:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n'} = 0, \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial n'} = v_{n'}$$

и условиям на бесконечности:

$$(\text{grad } \varphi)_\infty = 0, \quad (\text{grad } \varphi')_\infty = 0.$$

Введем две системы координат, симметричных относительно стенки (или свободной поверхности):

1) систему Oxy с началом в центре эллипса, лежащего в поперечном сечении первого цилиндра;

2) систему $O'x'y'$ с началом в центре эллипса, лежащего в поперечном сечении второго цилиндра.

Оси x и x' направим вдоль больших осей эллипсов в одном и том же направлении, оси y и y' — вдоль малых осей эллипсов в сторону стенки (свободной поверхности).

С каждым из эллипсов связем свою систему эллиптических координат, положив

$$\begin{aligned} x &= k\mu\zeta, & 1 \leq \zeta < \infty, \\ y &= k(1 - \mu^2)^{1/2}(\zeta^2 - 1)^{1/2}, & -1 \leq \mu \leq 1, \end{aligned}$$

где k — половина фокусного расстояния эллипсов.

Эллиптические координаты ζ' , μ' , связанные со вторым эллипсом, определяются аналогично.

Границное условие на поверхности первого эллиптического цилиндра имеет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = Ul + Vm + \omega(xm - yl),$$

где l , m — направляющие косинусы нормали; U , V — компоненты скорости; ω — угловая скорость вращения цилиндра. Из вида граничного условия следует

$$\varphi = U\varphi_1 + V\varphi_2 + \omega\varphi_3,$$

где φ_1 , φ_2 — потенциалы скоростей, создаваемые движением первого цилиндра с единичной скоростью вдоль осей Ox , Oy в предположении, что второй цилиндр неподвижен; φ_3 — потенциал скоростей, создаваемый вращением первого цилиндра с единичной угловой скоростью в том же предположении.

Каждая из функций φ_i должна удовлетворять уравнению неразрывности, условию на бесконечности и соответствующему граничному условию.

Как было указано, в случае движения тела около стенки „изображение“ должно двигаться симметрично телу. В силу этого, а также в силу симметрии выбранных систем координат потенциал φ' в системе координат $O'x'y'$ имеет вид

$$\varphi' = U\varphi'_1 + V\varphi'_2 + \omega\varphi'_3,$$

причем функции φ_i имеют смысл, аналогичный φ_i .

Следовательно, в случае движения эллиптического цилиндра около стенки потенциал скоростей равен

$$\Phi = U(\varphi_1 + \varphi'_1) + V(\varphi_2 + \varphi'_2) + \omega(\varphi_3 + \varphi'_3).$$

В случае движения тела под свободной поверхностью „изображение“ должно двигаться со скоростью, равной по величине, но противоположной по направлению скорости последнего в случае движения около стенки. Вследствие этого и вследствие симметрии систем координат потенциал φ^{**} имеет вид

$$\varphi^{**} = -U\varphi'_1 - V\varphi'_2 - \omega\varphi'_3.$$

Таким образом, в случае движения эллиптического цилиндра под свободной поверхностью потенциал скоростей равен

$$\Phi^* = U(\varphi_1 - \varphi'_1) + V(\varphi_2 - \varphi'_2) + \omega(\varphi_3 - \varphi'_3).$$

§ 2. Движение эллиптического цилиндра параллельно стенке или свободной поверхности

Пусть эллиптический цилиндр движется с единичной скоростью вдоль оси Ox , т. е. вдоль своей большой оси параллельно стенке. Потенциал φ_1 можно построить методом последовательных „изображений“, учитывая в каждом „изображении“ только главную часть.

За первое приближение примем потенциал, создаваемый движением эллиптического цилиндра в безграничной жидкости [1] $\varphi_1^{(1)} = A_1 \mu F(\zeta)$, где $F(\zeta) = \zeta - (\zeta^2 - 1)^{1/2}$.

Коэффициент A_1 определяется из граничного условия и равен $A_1 = k [\dot{F}(e_0^{-1})]^{-1}$, где e_0 — эксцентриситет поперечного сечения.

В рассматриваемом случае, когда большая ось параллельна стенке, можно считать, что поток, создаваемый движением цилиндра, вблизи поверхности „изображения“ мало отличается от поступательного потока. За скорость этого потока примем скорость частицы жидкости, совпадающей с центром „изображения“ ($\zeta = \eta$, $\mu = 0$):

$$\frac{1}{H_\zeta} \frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{1}{H_\mu} \frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial \mu} = \frac{A_1}{k} \eta^{-1} F(\eta),$$

где H_ζ , H_μ — коэффициенты Ляме; $\eta = \left[1 + \left(\frac{2h}{k}\right)^2\right]^{1/2}$.

Тогда для выполнения граничного условия на поверхности „изображения“ надо к потенциальному $\varphi_1^{(1)}$ прибавить потенциал

$$\varphi_1^{(2)} = -v_1 A_1 \mu' F(\zeta'),$$

где v_1 — скорость поступательного потока.

Рассуждая аналогично, придем к заключению, что для выполнения граничного условия на поверхности нашего цилиндра надо прибавить потенциал $\varphi_1^{(3)} = v_1^2 A_1 \mu F(\zeta)$.

Продолжая этот процесс, придем к следующему выражению для потенциала φ_1 :

$$\varphi_1 = A_1 \mu F(\zeta) \sum_{i=0}^{\infty} v_1^{2i} - A_1 \mu' F(\zeta') \sum_{i=0}^{\infty} v_1^{2i+1}.$$

Очевидно, что потенциал φ_1' в силу симметрии имеет аналогичный вид

$$\varphi_1' = -A_1 \mu F(\zeta) \sum_{i=0}^{\infty} v_1^{2i+1} + A_1 \mu' F(\zeta') \sum_{i=0}^{\infty} v_1^{2i}.$$

Таким образом, потенциал скоростей, создаваемый движением эллиптического цилиндра вдоль большой оси параллельно стенке, приближенно равен

$$\varphi_1 + \varphi_1' = A_1 \{ \mu F(\zeta) + \mu' F(\zeta') \} (1 + v_1)^{-1}$$

или, подставляя значения v_1 и A_1 ,

$$\varphi_1 + \varphi_1' = k \frac{\mu F(\zeta) + \mu' F(\zeta')}{\dot{F}(e_0^{-1}) + \eta^{-1} F(\eta)}. \quad (1)$$

Потенциал скоростей, создаваемый движением эллиптического цилиндра вдоль большой оси параллельно свободной поверхности, оказывается равным

$$\varphi_1 - \varphi_1' = A_1 \{ \mu F(\zeta) - \mu' F(\zeta') \} (1 - v_1)^{-1}$$

или

$$\varphi_1 - \varphi_1' = k \frac{\mu F(\zeta) - \mu' F(\zeta')}{\dot{F}(e_0^{-1}) - \eta^{-1} F(\eta)}.$$

Полученные потенциалы удовлетворяют всем условиям, сформулированным в § 1. Действительно, граничным условиям они удовлетворяют приближенно по самому методу их построения. Остальным условиям они удовлетворяют в силу того, что представляют собой линейные комбинации функций $\varphi_1^{(1)}$ и $\varphi_1'^{(1)}$.

Найденные потенциалы скоростей позволяют вычислить приближенную массу эллиптического цилиндра при движении его вблизи стенки или свободной поверхности.

Присоединенную массу будем подсчитывать по формуле

$$\lambda_{ii} = -\rho \iint (\varphi_i + \varphi_1') \frac{\partial(\varphi_i + \varphi_1')}{\partial n} dS, \quad (2)$$

где ρ — плотность жидкости, а интеграл берется по поверхности эллиптического цилиндра, высота которого равна единице. Подставляя в (2) выражение для потенциала (1) и значения нормальных производных на поверхности цилиндра, получим для λ_{ii} выражение

$$\lambda_{ii} = \frac{\rho}{\Delta_1} \iint k \mu F(\zeta) l dS + \frac{\rho}{\Delta_1} \iint k \mu' F(\zeta') l dS,$$

где $\Delta_1 = -\dot{F}(e_0^{-1}) - \eta^{-1} F(\eta)$, $l = \cos(n, x)$.

Принимая во внимание, что на поверхности цилиндра $\zeta = e_0^{-1}$, первый интеграл можно представить в виде

$$\frac{\rho}{\Delta_1} e_0 F(e_0^{-1}) \iint x l dS.$$

Применив теперь формулу Остроградского, получаем

$$\frac{\rho}{\Delta_1} e_0 F(e_0^{-1}) \pi ab.$$

Второй интеграл преобразуем по формуле Остроградского к объемному

$$\frac{\rho}{\Delta_1} \iiint \frac{\partial}{\partial x} [k \mu' F(\zeta')] d\tau.$$

Применим теорему о среднем, причем за среднее значение подынтегральной функции возьмем значение последней в центре „изображения“. Тогда второй интеграл равен

$$\frac{\rho}{\Delta_1} \eta^{-1} F(\eta) \pi ab.$$

Суммируя полученные результаты, найдем выражение для присоединенной массы λ_{ii} .

Коэффициент присоединенной массы эллиптического цилиндра при движении вдоль большой оси параллельно стенке равен

$$\chi_1 = \frac{e_0 F(e_0^{-1}) + \eta^{-1} F(\eta)}{-\dot{F}(e_0^{-1}) - \eta^{-1} F(\eta)} \quad (3)$$

или

$$\chi_1 = \frac{[1 - (1 - e_0^2)^{1/2}] + [1 - (1 - \eta^{-2})^{1/2}]}{[(1 - e_0^2)^{-1/2} - 1] - [1 - (1 - \eta^{-2})^{1/2}]} \quad (3a)$$

В случае движения эллиптического цилиндра вдоль большой оси параллельно свободной поверхности коэффициент присоединенной массы равен

$$\chi_1^* = \frac{e_0 F(e_0^{-1}) - \eta^{-1} F(\eta)}{-\dot{F}(e_0^{-1}) + \eta^{-1} F(\eta)} \quad (4)$$

Результаты расчета коэффициентов присоединенных масс для различных эллиптических цилиндров приведены на графике (рис. 1).

§ 3. Движение эллиптического цилиндра перпендикулярно стенке или свободной поверхности

Пусть теперь эллиптический цилиндр движется с единичной скоростью вдоль оси Oy , т. е. вдоль своей малой оси перпендикулярно стенке. Потенциал скоростей, создаваемый аналогичным движением в безграничной жидкости, равен

$$\varphi_2^{(1)} = A_2 (1 - \mu^2)^{1/2} F(\zeta).$$

Постоянная A_2 определяется из граничного условия и равна

$$A_2 = k (1 - e_0^2)^{-1/2} [\dot{F}(e_0^{-1})]^{-1}.$$

Повторяя все рассуждения предыдущего параграфа, получим, что компоненты скорости потока, набегающего на „изображение“, в данном случае будут равны

$$\frac{1}{H_\zeta} \frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial \zeta} = \frac{A_2}{k} \eta^{-1} (\eta^2 - 1)^{1/2} \dot{F}(\eta), \quad \frac{1}{H_p} \frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial \mu} = 0.$$

Для выполнения граничного условия на поверхности „изображения“ надо к потенциалу $\varphi_2^{(1)}$ прибавить потенциал $\varphi_2^{(2)} = v_2 A_2 (1 - \mu^2)^{1/2} F(\zeta')$, где v_2 — скорость потока.

Отличие от предыдущего случая заключается только в том, что здесь v_2 надо брать со знаком плюс. Это вызвано тем, что оси u и u' направлены в противоположные стороны. Продолжая процесс образования потенциалов $\varphi_2^{(i)}$, придем к следующему выражению для потенциала φ_2 :

$$\varphi_2 = A_2 (1 - \mu^2)^{1/2} F(\zeta) \sum_{i=0}^{\infty} v_2^{2i} + A_2 (1 - \mu'^2)^{1/2} F(\zeta') \sum_{i=0}^{\infty} v_2^{2i+1}.$$

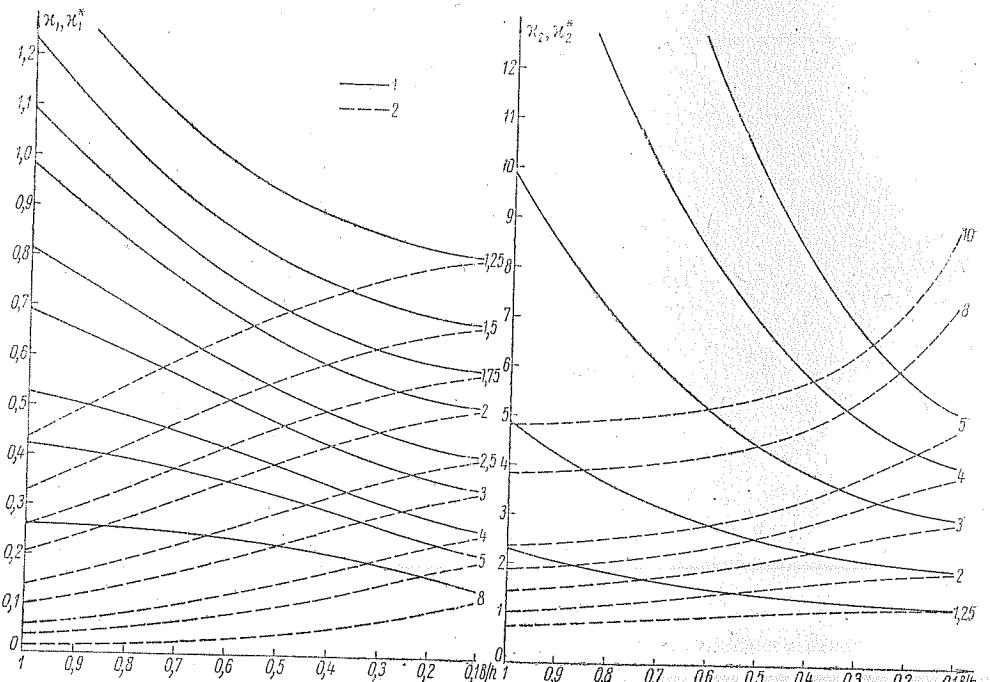


Рис. 1. Зависимость коэффициента присоединенной массы x_1 от расстояния до стенки — 1 и до свободной поверхности — 2.

Цифры около кривых показывают соотношение полуосей поперечного сечения цилиндра.

Тогда потенциал скоростей, создаваемый движением эллиптического цилиндра вдоль малой оси перпендикулярно стенке, приближенно равен

$$\varphi_2 + \varphi'_2 = A_2 \left\{ (1 - \mu^2)^{1/2} F(\zeta) + (1 - \mu'^2)^{1/2} F(\zeta') \right\} (1 - v_2)^{-1}$$

или, подставляя значения v_2 и A_2 ,

$$\varphi_2 + \varphi'_2 = k \frac{(1 - \mu^2)^{1/2} F(\zeta) + (1 - \mu'^2)^{1/2} F(\zeta')}{(1 - e_0^2)^{1/2} \dot{F}(e_0^{-1}) - \eta^{-1} (\eta^2 - 1)^{1/2} \dot{F}(\eta)}. \quad (5)$$

Потенциал скоростей, создаваемый движением эллиптического цилиндра вдоль малой оси перпендикулярно свободной поверхности, равен

$$\varphi_2 - \varphi'_2 = k \frac{(1 - \mu^2)^{1/2} F(\zeta) - (1 - \mu'^2)^{1/2} F(\zeta')}{(1 - e_0^2)^{1/2} \dot{F}(e_0^{-1}) + \eta^{-1} (\eta^2 - 1)^{1/2} \dot{F}(\eta)}.$$

Найденные потенциалы удовлетворяют всем условиям, сформулированным в § 1.

Переходим к вычислению присоединенных масс. Подставляя в (2) выражение для потенциала (5) и соответствующие граничные условия, получим

$$\lambda_{22} = \frac{\rho}{\Delta_2} \iint k (1 - \mu^2)^{1/2} F(\zeta) m dS + \frac{\rho}{\Delta_2} \iint k (1 - \mu'^2)^{1/2} F(\zeta') m dS,$$

где $\Delta_2 = -(1 - e_0^2)^{1/2} \dot{F}(e_0^{-1}) + \eta^{-1} (\eta^2 - 1)^{1/2} \dot{F}(\eta)$, $m = \cos(n, y)$.

Первый интеграл легко вычисляется и равен

$$\frac{\rho}{\Delta_2} e_0 (1 - e_0^2)^{-1/2} F(e_0^{-1}) \pi ab.$$

Ко второму интегралу применим сначала формулу Остроградского

$$\frac{\rho}{\Delta_2} \iiint \frac{\partial}{\partial y} [k (1 - \mu'^2)^{1/2} F(\zeta')] d\tau,$$

а затем теорему о среднем значении интеграла

$$\pi ab \frac{\rho}{\Delta_2} \frac{\partial}{\partial y} [k (1 - \mu'^2)^{1/2} F(\zeta')]_0 = -\pi ab \frac{\rho}{\Delta_2} \left\{ \frac{\partial \zeta'}{\partial y'} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta'} [k (1 - \mu'^2)^{1/2} F(\zeta')]_0 \right\} = -\pi ab \frac{\rho}{\Delta_2} \eta^{-1} (\eta^2 - 1)^{1/2} \dot{F}(\eta).$$

Коэффициент присоединенной массы эллиптического цилиндра при движении вдоль малой оси перпендикулярно стенке равен

$$x_2 = \frac{e_0 (1 - e_0^2)^{-1/2} F(e_0^{-1}) - \eta^{-1} (\eta^2 - 1)^{1/2} \dot{F}(\eta)}{(1 - e_0^2)^{1/2} \dot{F}(e_0^{-1}) + \eta^{-1} (\eta^2 - 1)^{1/2} \dot{F}(\eta)} \quad (6)$$

или

$$x_2 = \frac{[(1 - e_0^2)^{-1/2} - 1] + [1 - (1 - \eta^{-2})^{1/2}]}{[1 - (1 - e_0^2)^{1/2}] - [1 - (1 - \eta^{-2})^{1/2}]}.$$

Коэффициент присоединенной массы эллиптического цилиндра при движении вдоль малой оси перпендикулярно свободной поверхности равен

$$x_2^* = \frac{[(1 - e_0^2)^{-1/2} - 1] - [1 - (1 - \eta^{-2})^{1/2}]}{[1 - (1 - e_0^2)^{1/2}] + [1 - (1 - \eta^{-2})^{1/2}]} \quad (7)$$

По приближенным формулам (6) и (7) вычислены коэффициенты присоединенных масс различных эллиптических цилиндров при различных расстояниях от стенки или свободной поверхности. Результаты вычислений представлены на рис. 2.

Все приближенные выражения для коэффициентов присоединенных масс стремятся к точным выражениям при удалении цилиндра от стенки или свободной поверхности. Действительно, при $\eta \rightarrow \infty$ члены, зависящие от η , стремятся к нулю, а отношение членов, зависящих от e_0 , представляет собой точное выражение для соответствующего коэффициента присоединенной массы в безграничной жидкости. Именно:

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} x_1 = \lim_{\eta \rightarrow \infty} x_1^* = (1 - e_0^2)^{1/2} = \frac{b}{a},$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} x_2 = \lim_{\eta \rightarrow \infty} x_2^* = (1 - e_0^2)^{-1/2} = \frac{a}{b}.$$

Следует отметить, что между полученными приближенными выражениями для коэффициентов присоединенных масс имеют место соотношения $x_1^* = x_2^{-1}$, $x_2^* = x_1^{-1}$.

Из найденных выражений для коэффициентов присоединенных масс эллиптического цилиндра можно получить путем предельного перехода соответствующие коэффициенты для круглого цилиндра. Проделаем это для коэффициента x_1 . Разлагая числитель и знаменатель выражения (3а) в ряды, получим после сокращения на $\frac{1}{2}e_0^2$

$$x_1 = \frac{1 + \frac{k^2}{4} \frac{a^2}{a^2} + \dots + \frac{a^2}{k^2 \eta^2} + \frac{1}{4} \frac{a^2}{k^2 \eta^4} + \dots}{1 + \frac{3}{4} \frac{k^2}{a^2} + \dots - \frac{a^2}{k^2 \eta^2} - \frac{1}{4} \frac{a^2}{k^2 \eta^4} - \dots}.$$

По определению эллиптических координат при $k \rightarrow 0$ $k\eta \rightarrow 2h$. Переходя к пределу при $k \rightarrow 0$, получаем

$$\lim_{k \rightarrow 0} x_1 = \frac{1 + \frac{1}{4} \delta^2}{1 - \frac{1}{4} \delta^2},$$

где $\delta = \frac{a}{h}$, что совпадает с результатом, полученным в работе [2].

§ 4. Вращение эллиптического цилиндра вблизи стенки или свободной поверхности

В этом случае нам придется ограничиться вычислением мгновенного значения потенциала скоростей, соответствующего моменту, когда большая ось сечения цилиндра параллельна стенке.

Потенциал скоростей, создаваемый вращением эллиптического цилиндра в безграничной жидкости с единичной угловой скоростью, равен

$$\varphi_3^{(1)} = A_3 \mu (1 - \mu^2)^{1/2} F^2(\zeta).$$

Постоянная A_3 определяется из граничного условия и равна

$$A_3 = \frac{k^2}{2} e_0 (1 - e_0^2)^{-1/2} [F(e_0^{-1}) \dot{F}(e_0^{-1})]^{-1}.$$

В рассматриваемом случае можно считать, что поток, создаваемый вращением цилиндра, сообщает "изображению" только вращение. За угловую скорость "изображения" примем угловую скорость вращения кривой $\zeta = \eta$ (μ в пределах поверхности "изображения"), проходящей через центр "изображения", которая приближенно равна

$$\omega = \frac{1}{x} \frac{\partial \varphi_3^{(1)}}{\partial y} = \frac{1}{x} \frac{\partial \varphi_3^{(1)}}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial y}{\partial \zeta} \right)^{-1} = 2 \frac{A_3}{k^2} F(\eta) \dot{F}(\eta) \eta^{-2} (\eta^2 - 1)^{1/2}.$$

Для выполнения граничного условия на поверхности "изображения" надо к потенциальному $\varphi_3^{(1)}$ прибавить потенциал

$$\varphi_3^{(2)} = \omega A_3 \mu' (1 - \mu'^2)^{1/2} F^2(\zeta').$$

Продолжая процесс образования потенциалов $\varphi_3^{(i)}$, придем к выражению для потенциала

$$\varphi_3 = A_3 \mu (1 - \mu^2)^{1/2} F^2(\zeta) \sum_{i=0}^{\infty} \omega^{2i} + A_3 \mu' (1 - \mu'^2)^{1/2} F^2(\zeta') \sum_{i=0}^{\infty} \omega^{2i+1}.$$

Потенциал φ_3 получим заменой координат μ , ζ на координаты μ' , ζ' и наоборот.

Тогда потенциал скоростей при вращении эллиптического цилиндра вблизи стенки приближенно равен

$$\varphi_3 + \varphi'_3 = A_3 \{ \mu (1 - \mu^2)^{1/2} F^2(\zeta) + \mu' (1 - \mu'^2)^{1/2} F^2(\zeta') \} (1 - \omega)^{-1}$$

или, подставляя значения ω и A_3 ,

$$\varphi_3 + \varphi'_3 = k^2 \frac{\mu (1 - \mu^2)^{1/2} F^2(\zeta) + \mu' (1 - \mu'^2)^{1/2} F^2(\zeta')}{2e_0^{-1} (1 - e_0^2)^{1/2} F(e_0^{-1}) \dot{F}(e_0^{-1}) - 2\eta^{-2} (\eta^2 - 1)^{1/2} F(\eta) \dot{F}(\eta)}.$$

Потенциал скоростей, создаваемый вращением цилиндра вблизи свободной поверхности, приближенно равен

$$\varphi_3 - \varphi'_3 = k^2 \frac{\mu (1 - \mu^2)^{1/2} F^2(\zeta) - \mu' (1 - \mu'^2)^{1/2} F^2(\zeta')}{2e_0^{-1} (1 - e_0^2)^{1/2} F(e_0^{-1}) \dot{F}(e_0^{-1}) + 2\eta^{-2} (\eta^2 - 1)^{1/2} F(\eta) \dot{F}(\eta)}.$$

Найденные потенциалы удовлетворяют всем условиям, сформулированным в § 1.

Присоединенный момент инерции вычисляется приближенно аналогично тому, как это было сделано в § 2 и 3, и оказывается равным (в случае вращения около стенки)

$$\lambda_{33} = \frac{1}{4} \pi ab\rho (a^2 - b^2) \times \times \frac{e_0^2 (1 - e_0^2)^{-1/2} F^2(e_0^{-1}) - 2\eta^{-2} (\eta^2 - 1)^{1/2} F(\eta) \dot{F}(\eta)}{-2e_0^{-1} (1 - e_0^2)^{1/2} F(e_0^{-1}) \dot{F}(e_0^{-1}) + 2\eta^{-2} (\eta^2 - 1)^{1/2} F(\eta) \dot{F}(\eta)}. \quad (8)$$

Момент инерции массы жидкости в объеме эллиптического цилиндра относительно его оси, как известно, равен $\frac{1}{4} \pi ab\rho (a^2 + b^2)$. Относя присоединенный момент инерции (8) к моменту инерции массы жидкости в объеме цилиндра, получим выражение для коэффициента присоединенного момента инерции эллиптического цилиндра в случае вращения около стенки

$$\lambda_{33} = \frac{e_0^2}{2 - e_0^2} \cdot \frac{(1 - e_0^2)^{-1/2} [1 - (1 - e_0^2)^{1/2}]^2 + 2[1 - (1 - \eta^{-2})^{1/2}]^2}{2e_0^{-2} [1 - (1 - e_0^2)^{1/2}]^2 - 2[1 - (1 - \eta^{-2})^{1/2}]^2}.$$

Коэффициент присоединенного момента инерции в случае вращения вблизи свободной поверхности отличается от вышеприведенного лишь знаками перед вторыми слагаемыми в числителе и знаменателе.

Полученные выражения справедливы только для момента, когда большая ось сечения цилиндра параллельна стенке. Выражение для присоединенного момента инерции (8) стремится к точному значению при удалении цилиндра от стенки. Действительно, $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \lambda_{33} = \frac{1}{8} \pi \rho k^4$.

Summary

The paper considers the unsteady motion of an elliptical cylinder in an ideal incompressible fluid bounded by a plane wall or a free surface. Approximations of the velocity potentials for all cases where the major axis of the cross section keeps parallel to the wall all through the motion are given. The virtual masses are calculated with the approximate expressions.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коchin, Кибель, Розе. Теоретическая гидромеханика. ч. I, 1956.
2. В. С. Сабанеев. Присоединенные массы эллипсоида вращения, движущегося в жидкости, ограниченной плоской стенкой. Вестник ЛГУ, 19, 1956.

Статья поступила в редакцию 24 апреля 1962 г.