УДК 533.6.013.42

В. С. Сабанеев

ПРИСОЕДИНЕННЫЕ МАССЫ УПРУГОГО ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ, ПЛАВАЮЩЕГО НА ПОВЕРХНОСТИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

В статье получены приближенные выражения для потенциалов скоростей при колебаниях упругого эллипсоида вращения, плавающего на поверхности невесомой или весьма тяжелой жидкости. Рассмотрены случаи вертикальных и горизонтальных колебаний с различным числом узлов. С помощью найденных выражений для потенциалов скоростей вычислены величины присоединенных масс. Результаты вычислений для колебаний с числом узлов от 0 до 5 представлены на графиках.

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим малые колебания однородного упругого тела, имеющего форму удлиненного эллипсоида вращения, плавающего на поверхности идеальной несжимаемой жидкости. Предположим, что в недеформированном состоянии эллипсоид погружен наполовину.

Введем систему координат $Oxyz$ с началом в центре эллипсоида. Ось Ox направим вдоль большой оси эллипсоида в недеформированном состоянии, а ось Oz — внутрь жидкости. Кроме того, введем эллиптические координаты, положив

$$x=\varkappa\mu\zeta, \qquad 1\leqslant\zeta<\infty,$$
$$y=r\cos\omega, \qquad -1\leqslant\mu\leqslant+1,$$
$$z=r\sin\omega, \qquad 0\leqslant\omega<2\pi,$$

где $r=\varkappa(1-\mu^2)^{1/2}(\zeta^2-1)^{1/2}$, $\varkappa$ — половина фокусного расстояния эллипсоида.

Уравнение поверхности эллипсоида имеет вид

$$\zeta=\zeta_0.$$

Потенциал скоростей Φ (в предположении, что он существует) должен удовлетворять уравнению Лапласа во всем пространстве, заполненном жидкостью

$$\nabla^2\Phi=0, \tag{1,1}$$

условию на бесконечности

$$(\mathrm{grad}\,\Phi)_\infty=0, \tag{1,2}$$

граничному условию на смоченной поверхности тела

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}=v_n \tag{1,3}$$

и условию на свободной поверхности жидкости, которое в случае гармонических колебаний с частотой Ω имеет вид

$$\Phi+\frac{g}{\Omega^2}\frac{\partial\Phi}{\partial z}=0 \quad \text{при } z=0. \tag{1,4}$$

Рассмотрим два предельных случая условия (1,4): условие свободной поверхности без учета сил тяжести (число Фруда $\mathrm{F} \to \infty$)

$$\Phi = 0 \quad \text{при } z = 0 \tag{1,4а}$$

и условие «твердой стенки» (число Фруда $\mathrm{F} = 0$)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0. \tag{1,4б}$$

Условию (1,4а) можно удовлетворить, полагая, что зеркальное «изображение» смоченной поверхности эллипсоида движется таким образом, что проекции скоростей на ось Oz равны проекциям скоростей эллипсоида, а проекции скоростей на оси Ox и Oy равны по величине, но противоположны по направлению. Таким образом, рассматриваемая задача сводится к задаче с граничными условиями, заданными на всей поверхности эллипсоида.

Потенциал скоростей Φ_1 должен удовлетворять следующим условиям: всюду вне эллипсоида

$$\nabla^2 \Phi_1 = 0, \tag{1,5}$$

$$(\operatorname{grad} \Phi_1)_\infty = 0, \tag{1,6}$$

на всей поверхности эллипсоида в случае вертикальных колебаний (вдоль оси Oz)

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = v_n, \tag{1,7а}$$

а в случае горизонтальных колебаний (вдоль оси Oy)

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = v_n \operatorname{sign} \sin \omega. \tag{1,7б}$$

Из рассмотрения условий (1,5), (1,6) и (1,7а) видно, что задача о вертикальных колебаниях эллипсоида, плавающего на поверхности жидкости, при $\mathrm{F} \to \infty$ совпадает с задачей о колебаниях эллипсоида в безграничной жидкости [1].

Условию (1,4б) можно удовлетворить, полагая, что зеркальное «изображение» смоченной поверхности эллипсоида движется симметрично относительно поверхности жидкости. Таким образом, и в этом случае рассматриваемая задача сводится к задаче с граничными условиями, заданными на поверхности всего эллипсоида.

Потенциал скоростей Φ_2 должен удовлетворять следующим условиям: всюду вне эллипсоида

$$\nabla^2 \Phi_2 = 0, \tag{1,8}$$

$$(\operatorname{grad} \Phi_2)_\infty = 0, \tag{1,9}$$

на всей поверхности эллипсоида при вертикальных колебаниях

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = v_n \operatorname{sign} \sin \omega, \tag{1,10а}$$

а при горизонтальных колебаниях

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = v_n. \tag{1,10б}$$

Из условий (1,8), (1,9) и (1,10б) видно, что задача о горизонтальных колебаниях эллипсоида, плавающего на поверхности весьма тяжелой жидкости ($\mathrm{F} = 0$), совпадает с задачей о колебаниях эллипсоида в безграничной жидкости.

Распределение нормальных скоростей на поверхности тела при изгибных колебаниях (горизонтальных), учитывающее поворот поперечных сечений, имеет вид

$$v_\zeta = \left[f(x) \frac{\partial y}{\partial \zeta} - f'(x)\, y \frac{\partial x}{\partial \zeta} \right] \cos \Omega t, \tag{1,11}$$

где $f(x)$ — функция, определяющая форму колебания.

При рассмотрении малых колебаний граничному условию можно удовлетворять не на изменяющейся поверхности колеблющегося тела, а на неподвижной поверхности его в недеформированном состоянии, т. е. при $\zeta = \zeta_0$.

Предполагая, что форма колебания представляет собой параболу соответствующего порядка, т. е. что $f(x)$ — полином, можно найти приближенное выражение для потенциала скоростей при малых многоузловых колебаниях однородного эллипсоида вращения в безграничной жидкости [1]

$$\Phi = C_s P_s^1(\mu)\, Q_s^1(\zeta) \cos \omega \cos \Omega t, \tag{1,12}$$

где $P_s^1(\mu)$, $Q_s^1(\zeta)$ — присоединенные функции Лежандра I и II рода, $s - 1$ — число узлов.

Исходя из (1,12), распределение нормальных скоростей при малых горизонтальных колебаниях эллипсоида вращения в безграничной жидкости можно представить в виде

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right)_{\zeta = \zeta_0} = C_s P_s^1(\mu)\, \dot{Q}_s^1(\zeta_0) \cos \omega \cos \Omega t, \tag{1,13}$$

причем здесь точкой обозначена операция дифференцирования.

Из (1,7б) и (1,13) следует, что граничное условие в случае горизонтальных колебаний эллипсоида, плавающего на поверхности невесомой жидкости, имеет вид

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta} \right)_{\zeta = \zeta_0} = C_s P_s^1(\mu)\, \dot{Q}_s^1(\zeta_0) \cos \omega \cos \Omega t \operatorname{sign} \sin \omega. \tag{1,14}$$

Граничное условие (1,10а) при вертикальных колебаниях эллипсоида, плавающего на поверхности весьма тяжелой жидкости, может быть представлено в виде

$$\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \zeta} \right)_{\zeta = \zeta_0} = C_s P_s^1(\mu)\, \dot{Q}_s^1(\zeta_0) \sin \omega \cos \Omega t \operatorname{sign} \sin \omega. \tag{1,15}$$

§ 2. Горизонтальные колебания эллипсоида, плавающего на поверхности невесомой жидкости ($\mathrm{F} \to \infty$)

Потенциал скоростей Φ_1 будем искать в виде ряда

$$\Phi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \left[A_n^m \cos m\omega + B_n^m \sin m\omega \right] P_n^m(\mu)\, Q_n^m(\zeta) \cos \Omega t. \tag{2,1}$$

Представим $\operatorname{sign} \sin \omega$ также в виде ряда

$$\operatorname{sign} \sin \omega = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin (2k+1)\omega}{2k+1}.$$

Тогда для определения коэффициентов A_n^m и B_n^m получаем уравнение

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \left[A_n^m \cos m\omega + B_n^m \sin m\omega \right] P_n^m(\mu)\, \dot{Q}_n^m(\zeta_0) =$$

$$= \frac{4}{\pi} C_s P_s^1(\mu)\, \dot{Q}_s^1(\zeta_0) \cos \omega \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin (2k+1)\omega}{2k+1}. \tag{2,2}$$

Преобразуя правую часть (2,2), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[A_n^m \cos m\omega + B_n^m \sin m\omega\right] P_n^m(\mu)\, \dot{Q}_n^m(\zeta_0) =$$

$$= \frac{4}{\pi} C_s P_s^1(\mu)\, \dot{Q}_s^1(\zeta_0) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{4k^2-1} \sin 2k\omega. \qquad (2,3)$$

Уравнению (2,3) можно удовлетворить, положив $A_n^m = 0$ при всех n, $B_n^m = 0$ при $m = 2k-1$. Тогда для определения коэффициентов B_n^{2k} получим уравнение

$$\sum_{n=2k}^{\infty} B_n^{2k} P_n^{2k}(\mu)\, \dot{Q}_n^{2k}(\zeta_0) = \frac{4}{\pi} \frac{2k}{4k^2-1} C_s P_s^1(\mu)\, \dot{Q}_s^1(\zeta_0).$$

Отсюда

$$B_n^{2k} = \frac{8}{\pi} \frac{k(2n+1)}{4k^2-1} \frac{(n-2k)!}{(n+2k)!} \frac{C_s \dot{Q}_s^1(\zeta_0)}{\dot{Q}_n^{2k}(\zeta_0)} J_{n,\,s}^{2k},$$

где

$$J_{n,\,s}^{2k} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} P_s^1(\mu)\, P_n^{2k}(\mu)\, d\mu. \qquad (2,4)$$

Так как $P_n^m(\mu)$ является четной функцией, если $n+m$ — четное число, и нечетной функцией в противном случае, то при нечетном s

$$J_{2\nu+1,\,2i+1}^{2k} = 0, \quad J_{2\nu,\,2i+1}^{2k} = \int_0^1 P_{2i+1}^1(\mu)\, P_{2\nu}^{2k}(\mu)\, d\mu$$

и, следовательно,

$$B_{2\nu}^{2k} = \frac{8}{\pi} \frac{k(4\nu+1)}{4k^2-1} \frac{(2\nu-2k)!}{(2\nu+2k)!} \frac{C_{2i+1} \dot{Q}_{2i+1}^1(\zeta_0)}{\dot{Q}_{2\nu}^{2k}(\zeta_0)} J_{2\nu,\,2i+1}^{2k}. \qquad (2,5а)$$

При четном s

$$J_{2\nu,\,2i}^{2k} = 0, \quad J_{2\nu+1,\,2i}^{2k} = \int_0^1 P_{2i}^1(\mu)\, P_{2\nu+1}^{2k}(\mu)\, d\mu$$

и, следовательно,

$$B_{2\nu+1}^{2k} = \frac{8}{\pi} \frac{k(4\nu+3)}{4k^2-1} \frac{(2\nu-2k+1)!}{(2\nu+2k+1)!} \frac{C_{2i} \dot{Q}_{2i}^1(\zeta_0)}{\dot{Q}_{2\nu+1}^{2k}(\zeta_0)} J_{2\nu+1,\,2i}^{2k}. \qquad (2,5б)$$

Выражения для интегралов $J_{2\nu,\,1}^{2k}$ и $J_{2\nu+1,\,2}^{2k}$ приведены в работе [2]. Для вычисления интегралов $J_{n,\,s}^{2k}$ при $s \geqslant 3$, используя дважды рекуррентное соотношение

$$(2n+1)\,\mu P_n^l(\mu) = (n-l+1)\, P_{n+1}^l(\mu) + (n+l)\, P_{n-1}^l(\mu),$$

получим

$$J_{n,\,s+1}^{2k} = \frac{2s+1}{s(2n+1)}\left[(n-2k+1)\, J_{n+1,\,s}^{2k} + (n+2k)\, J_{n-1,\,s}^{2k}\right] - \frac{s+1}{s} J_{n,\,s-1}^{2k}. \qquad (2,6)$$

Подставляя найденные значения B_n^{2k} (2,5а) и (2,5б) в (2,1), получим выражения для потенциала скоростей Φ_1: при нечетном s

$$\Phi_1 = \frac{8}{\pi} C_{2i+1} \dot{Q}_{2i+1}^1(\zeta_0) \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\nu} \frac{k(4\nu+1)}{4k^2-1} \frac{(2\nu-2k)!}{(2\nu+2k)!} \times$$

$$\times J_{2\nu,\,2i+1}^{2k} P_{2\nu}^{2k}(\mu) \frac{Q_{2\nu}^{2k}(\zeta)}{\dot{Q}_{2\nu}^{2k}(\zeta_0)} \sin 2k\omega \cos \Omega t \qquad (2,7а)$$

и при четном s

$$\Phi_1 = \frac{8}{\pi} C_{2i} \dot{Q}_{2i}^1(\zeta_0) \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\nu} \frac{k(4\nu+3)}{4k^2-1} \frac{(2\nu-2k+1)!}{(2\nu+2k+1)!} \times$$

$$\times J_{2\nu+1,\,2i}^{2k} P_{2\nu+1}^{2k}(\mu) \frac{Q_{2\nu+1}^{2k}(\zeta)}{\dot{Q}_{2\nu+1}^{2k}(\zeta_0)} \sin 2k\omega \cos \Omega t. \qquad (2,7б)$$

Для доказательства абсолютной и равномерной сходимости найденных решений в интервале $-1 \leqslant \mu \leqslant 1$ для всех значений ζ достаточно доказать абсолютную и равномерную сходимость Φ_1 на поверхности эллипсоида $\zeta = \zeta_0$. При любом s доказательство может быть проведено так же, как в работе [2] для случая движения эллипсоида вдоль большой оси.

Проведем доказательство, например, для случая $s = 3$. Прежде всего, найдем выражение для $J_{2\nu,\,3}^{2k}$. Для этого воспользуемся выражениями для $J_{2\nu}^{2k}$ и $J_{2\nu+1}^{2k}$, приведенными в работе [2]:

$$J_{2\nu,\,1}^{2k} = J_{2\nu}^{2k} = \frac{\pi}{2} \frac{4k^2-1}{2\nu-1} \frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu+2)!!} \frac{(2\nu+2k-1)!!}{(2\nu-2k)!!},$$

$$J_{2\nu+1,\,2}^{2k} = 3J_{2\nu+1}^{2k} = \frac{3\pi}{2} \frac{4k^2-1}{2\nu-1} \frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu+4)!!} \frac{(2\nu+2k+1)!!}{(2\nu-2k)!!}.$$

Тогда по формуле (2,6) найдем

$$J_{2\nu,\,3}^{2k} = \frac{3\pi}{4} \frac{4k^2-1}{2\nu-3} \frac{(2\nu-3)!!}{(2\nu+4)!!} \frac{(2\nu+2k-1)!!}{(2\nu-2k)!!} \left[(4\nu+1)^2 - 4 - 20k^2\right].$$

Подставим выражение для $J_{2\nu,\,3}^{2k}$ в (2,7а) и представим потенциал Φ_1 в виде

$$\Phi_1(\zeta_0,\ \mu,\ \omega,\ t) = D_3(\zeta_0,\ t) \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu,\,3} S_{\nu,\,3}, \qquad (2,8)$$

где

$$\alpha_{\nu,\,3} = \frac{4\nu+1}{(2\nu-1)(2\nu-3)(2\nu+2)(2\nu+4)} \frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!},$$

$$S_{\nu,\,3} = \sum_{k=1}^{\nu} k\left[(4\nu+1)^2 - 4 - 20k^2\right] \frac{(2\nu-2k-1)!!}{(2\nu+2k)!!} F_{2\nu}^{2k}(\zeta_0)\, P_{2\nu}^{2k}(\mu) \sin 2k\omega,$$

$$F_n^{2k}(\zeta_0) = -\frac{\zeta_0}{\zeta_0^2-1} \frac{Q_n^{2k}(\zeta_0)}{\dot{Q}_n^{2k}(\zeta_0)}.$$

Для оценки $\alpha_{\nu,\,3}$ при больших ν воспользуемся неравенством

$$\frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!} < \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}}. \qquad (2,9)$$

Тогда очевидно, что при больших ν $\alpha_{\nu,\,3}$ убывает как $\nu^{-\frac{7}{2}}$

Конечную сумму $S_{\nu,3}$ преобразуем

$$S_{\nu,3}=\sum_{k=1}^{\nu}\left\{k\left[(4\nu+1)^2-4-20k^2\right]F_{2\nu}^{2k}(\zeta_0)\sin 2k\omega\times\right.$$
$$\left.\times\frac{(2\nu-2k-1)!!}{(2\nu+2k)!!}\sqrt{\frac{(2\nu+2k)!}{(2\nu-2k)!}}\right\}\sqrt{\frac{(2\nu-2k)!}{(2\nu+2k)!}}P_{2\nu}^{2k}(\mu)$$

и, используя неравенство

$$\left|\sum_{k=k_0}^{n}a_kb_k\right|\leqslant\left[\sum_{k=k_0}^{n}a_k^2\sum_{k=k_0}^{n}b_k^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

получим

$$|S_{\nu,3}|\leqslant\left\{\sum_{k=1}^{\nu}k^2\left[(4\nu+1)^2-4-20k^2\right]^2\left[F_{2\nu}^{2k}(\zeta_0)\right]^2\sin^2k\omega\times\right.$$
$$\left.\times\frac{(2\nu-2k-1)!!}{(2\nu-2k)!!}\frac{(2\nu+2k-1)!!}{(2\nu+2k)!!}\sum_{k=1}^{\nu}\frac{(2\nu-2k)!}{(2\nu+2k)!}\left[P_{2\nu}^{2k}(\mu)\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Последняя сумма, как показано, например, в работе [2], не превосходит 0,5. Используя (2,9) и принимая во внимание, что $\sin^2 k\omega\leqslant 1$, получим при больших ν

$$|S_{\nu,3}|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\sum_{k=1}^{\nu}k^2\left[(4\nu+1)^2-4-20k^2\right]^2\frac{2\nu-2k+2}{2\nu-2k+1}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{1}{\sqrt{\nu-k+1}}\frac{1}{\sqrt{\nu+k}}\left[F_{2\nu}^{2k}(\zeta_0)\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Из рекуррентных соотношений для присоединенных функций Лежандра II рода можно получить

$$F_n^{2k}(\zeta_0)<\frac{\zeta_0^2}{\zeta_0^2-1}\frac{1}{n+1}.$$

Тогда

$$|S_{\nu,3}|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\zeta_0^2}{\zeta_0^2-1}\frac{1}{2\nu+1}\left\{\sum_{k=1}^{\nu}\frac{k^2\left[(4\nu+1)^2-4-20k^2\right]^2}{2\nu-2k+1}\frac{\sqrt{\nu-k+1}}{\sqrt{\nu+k}}\right\}^{\frac{1}{2}}<$$
$$<\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\zeta_0^2}{\zeta_0^2-1}\frac{1}{2\nu+1}\left\{\sum_{k=1}^{\nu}2k^2R_3(\nu,k)\frac{2\nu-\sqrt{5k^2+1}+\frac{1}{2}}{2\nu-2k+1}\right\}^{\frac{1}{2}}<$$
$$<\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\zeta_0^2}{\zeta_0^2-1}\frac{1}{2\nu+1}\left\{\sum_{k=1}^{\nu}2k^2R_3(\nu,k)\right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $R_3(\nu, k)$ растет как ν.

Отсюда видно, что $|S_{\nu,3}|$ с ростом ν увеличивается как ν^2, и, следовательно, члены ряда (2,8) убывают как $\nu^{-\frac{3}{2}}$, что и доказывает абсолютную и равномерную сходимость ряда (2,7а) в интервале $-1\leqslant\mu\leqslant 1$ для всех значений ζ_0.

Вычислим теперь кинетическую энергию жидкости, определяемую по формуле

$$2T=-\rho\iint\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial n}dS,$$

где ρ — плотность жидкости, а интегрирование распространяется по поверхности тела.

Для тела, имеющего форму эллипсоида вращения, получаем

$$2T=-\rho\iint\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial n}\,r\,d\omega\,ds_\mu,$$

где

$$ds_\mu=\varkappa\left(\frac{\zeta_0^2-\mu^2}{1-\mu^2}\right)^{\frac{1}{2}}d\mu,\quad\frac{\partial\zeta}{\partial n}=\frac{1}{\varkappa}\left(\frac{\zeta_0^2-1}{\zeta_0^2-\mu^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом,

$$2T=-\rho\varkappa\left(\zeta_0^2-1\right)\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}d\mu\,d\omega. \tag{2,10}$$

Подставляя в (2,10) выражения для потенциала скоростей (2,7а), (2,7б) и граничное условие (1,14) и принимая во внимание, что

$$\int_0^{\pi}\cos\omega\sin 2k\omega\,d\omega=\frac{4k}{4k^2-1}\quad\text{и}\quad\int_{-1}^{1}P_s^1(\mu)P_n^{2k}(\mu)\,d\mu=2J_{n,s}^{2k},$$

получим для кинетической энергии жидкости выражение при нечетном s

$$2T=\frac{32\rho\varkappa\left(\zeta_0^2-1\right)^2}{\pi\zeta_0}\left[C_{2i+1}\dot{Q}_{2i+1}^1(\zeta_0)\right]^2\cos^2\Omega t\times$$
$$\times\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\nu}\frac{4k^2(4\nu+1)}{(4k^2-1)^2}\frac{(2\nu-2k)!}{(2\nu+2k)!}\left[J_{2\nu,\,2i+1}^{2k}\right]^2F_{2\nu}^{2k}(\zeta_0), \tag{2,11а}$$

а при четном s

$$2T=\frac{32\rho\varkappa\left(\zeta_0^2-1\right)^2}{\pi\zeta_0}\left[C_{2i}\dot{Q}_{2i}^1(\zeta_0)\right]^2\cos^2\Omega t\times$$
$$\times\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\nu}\frac{4k^2(4\nu+3)}{(4k^2-1)^2}\frac{(2\nu-2k+1)!}{(2\nu+2k+1)!}\left[J_{2\nu+1,\,2i}^{2k}\right]^2F_{2\nu+1}^{2k}(\zeta_0). \tag{2,11б}$$

Кинетическая энергия эллипсоида вращения при сделанном предположении о форме колебаний вычислена в работе [1]

$$2T_1=\pi\rho_1a^{2s+1}\frac{\zeta_0^2-1}{\zeta_0^2}\frac{2s(s+1)}{2s+1}\left[\frac{(s-1)!}{(2s-1)!!}\right]^2f_s\left(\frac{1}{\zeta_0}\right)\cos^2\Omega t, \tag{2,12}$$

где ρ_1 — плотность тела, $a=\varkappa\zeta_0$ — большая полуось эллипсоида. Выражения для $f_s(\zeta_0^{-1})$ при $s=1, 2, \ldots, 6$ приведены в работе [1].

Относя кинетическую энергию жидкости к кинетической энергии эллипсоида (2,12) при $\rho_1=\rho$ и принимая во внимание [1]

$$C_s\dot{Q}_s^1(\zeta_0)=\frac{(s-1)!}{(2s-1)!!}\frac{a^s}{\sqrt{\zeta_0^2-1}}\left[\frac{s-1}{\zeta_0^2}-(s-2)\right],$$

получим для коэффициента присоединенной массы при горизонтальных изгибных колебаниях эллипсоида вращения на поверхности невесомой жидкости выражение

$$\lambda_s=\frac{32}{\pi^2}\frac{2s+1}{2s(s+1)}\frac{\left[\frac{s-1}{\zeta_0^2}-(s-2)\right]^2}{f_s\left(\frac{1}{\zeta_0}\right)}\times$$
$$\times\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\nu}\frac{4k^2(4\nu+1)}{(4k^2-1)^2}\frac{(2\nu-2k)!}{(2\nu+2k)!}\left[J_{2\nu,\,s}^{2k}\right]^2F_{2\nu}^{2k}(\zeta_0) \tag{2,13а}$$

при $s=2i+1$, т. е. при колебаниях с четным числом узлов, и

$$\lambda_s=\frac{32}{\pi^2}\frac{2s+1}{2s(s+1)}\frac{\left[\frac{s-1}{\zeta_0^2}-(s-2)\right]^2}{f_s\left(\frac{1}{\zeta_0}\right)}\times$$

$$\times\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\nu}\frac{4k^2(4\nu+3)}{(4k^2-1)^2}\frac{(2\nu-2k+1)!}{(2\nu+2k+1)!}\left[J^{2k}_{2\nu+1,\ s}\right]^2F^{2k}_{2\nu+1}(\zeta_0) \qquad (2,13б)$$

при $s=2i$, т. е. при колебаниях с нечетным числом узлов.

Выражения (2,13а) и (2,13б) при $s=1$, 2 совпадают с результатами работы [2] и дают точные значения коэффициентов присоединенной массы эллипсоида вращения при поступательном и вращательном движении. При $s\geqslant 3$ эти выражения справедливы лишь приближенно, что вытекает из сделанного допущения о форме колебаний.

§ 3. Вертикальные колебания эллипсоида, плавающего на поверхности весьма тяжелой жидкости (F=0)

Потенциал скоростей Φ_2 будем искать в виде ряда (2,1). Подставляя (2,1) в граничное условие (1,15), получим уравнение для определения коэффициентов A_n^m и B_n^m

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[A_n^m\cos m\omega+B_n^m\sin m\omega\right]P_n^m(\mu)\,\dot Q_n^m(\zeta_0)=$$

$$=\frac{4}{\pi}C_sP_s^1(\mu)\,\dot Q_s^1(\zeta_0)\sin\omega\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)\omega}{2k+1}. \qquad (3,1)$$

Преобразуя правую часть (3,1), будем иметь

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[A_n^m\cos m\omega+B_n^m\sin m\omega\right]P_n^m(\mu)\,\dot Q_n^m(\zeta_0)=$$

$$=\frac{4}{\pi}C_sP_s^1(\mu)\,\dot Q_s^1(\zeta_0)\left[\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2k\omega}{4k^2-1}\right]. \qquad (3,2)$$

Уравнению (3,2) можно удовлетворить, положив $B_n^m=0$ при всех n, $A_n^m=0$ при нечетном m. Тогда для определения коэффициентов A_n^{2k} получим уравнения

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n^0P_n^0(\mu)\,\dot Q_n^0(\zeta_0)=\frac{2}{\pi}C_sP_s^1(\mu)\,\dot Q_s^1(\zeta_0),\quad k=0,$$

$$\sum_{n=2k}^{\infty}A_n^{2k}P_n^{2k}(\mu)\,\dot Q_n^{2k}(\zeta_0)=-\frac{4}{\pi}\frac{1}{4k^2-1}C_sP_s^1(\mu)\,\dot Q_s^1(\zeta_0).$$

Отсюда

$$A_n^0=\frac{2(2n+1)}{\pi}\frac{C_s\dot Q_s^1(\zeta_0)}{\dot Q_n^0(\zeta_0)}J^0_{n,\ s},$$

$$A_n^{2k}=-\frac{4}{\pi}\frac{2n+1}{4k^2-1}\frac{(n-2k)!}{(n+2k)!}\frac{C_s\dot Q_s^1(\zeta_0)}{\dot Q_n^{2k}(\zeta_0)}J^{2k}_{n,\ s},\quad k\geqslant 1.$$

Из вида интегралов (2,4) следует, что они отличны от нуля только, если $n+s$ — нечетное число. Следовательно, при $s=2i+1$

$$A^0_{2\nu+1}=A^{2k}_{2\nu+1}=0,$$

$$A^0_{2\nu}=\frac{2(4\nu+1)}{\pi}\frac{C_{2i+1}\dot Q^1_{2i+1}(\zeta_0)}{\dot Q^0_{2\nu}(\zeta_0)}J^0_{2\nu,\ 2i+1},$$

$$A^{2k}_{2\nu}=-\frac{4}{\pi}\frac{4\nu+1}{4k^2-1}\frac{(2\nu-2k)!}{(2\nu+2k)!}\frac{C_{2i+1}\dot Q^1_{2i+1}(\zeta_0)}{\dot Q^{2k}_{2\nu}(\zeta_0)}J^{2k}_{2\nu,\ 2i+1},\quad k\geqslant 1, \qquad (3,3а)$$

а при $s=2i$

$$A^0_{2\nu}=A^{2k}_{2\nu}=0,$$

$$A^0_{2\nu+1}=\frac{2(4\nu+3)}{\pi}\frac{C_{2i}\dot Q^1_{2i}(\zeta_0)}{\dot Q^0_{2\nu+1}(\zeta_0)}J^0_{2\nu+1,\ 2i},$$

$$A^{2k}_{2\nu+1}=-\frac{4}{\pi}\frac{4\nu+3}{4k^2-1}\frac{(2\nu-2k+1)!}{(2\nu+2k+1)!}\frac{C_{2i}\dot Q^1_{2i}(\zeta_0)}{\dot Q^{2k}_{2\nu+1}(\zeta_0)}J^{2k}_{2\nu+1,\ 2i},\quad k\geqslant 1. \qquad (3,3б)$$

Подставляя найденные значения A_n^{2k} в (2,1), получим для потенциала скоростей Φ_2 выражение при нечетном s

$$\Phi_2=\frac{4}{\pi}C_{2i+1}\dot Q^1_{2i+1}(\zeta_0)\sum_{\nu=0}^{\infty}(4\nu+1)\left\{\frac{1}{2}J^0_{2\nu,\ 2i+1}\frac{Q^0_{2\nu}(\zeta)}{\dot Q^0_{2\nu}(\zeta_0)}P^0_{2\nu}(\mu)-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{4k^2-1}\frac{(2\nu-2k)!}{(2\nu+2k)!}J^{2k}_{2\nu,\ 2i+1}\frac{Q^{2k}_{2\nu}(\zeta)}{\dot Q^{2k}_{2\nu}(\zeta_0)}P^{2k}_{2\nu}(\mu)\cos 2k\omega\right\}\cos\Omega t \qquad (3,4а)$$

и при четном s

$$\Phi_2=\frac{4}{\pi}C_{2i}\dot Q^1_{2i}(\zeta_0)\sum_{\nu=0}^{\infty}(4\nu+3)\left\{\frac{1}{2}J^0_{2\nu+1,\ 2i}\frac{Q^0_{2\nu+1}(\zeta)}{\dot Q^0_{2\nu+1}(\zeta_0)}P^0_{2\nu+1}(\mu)-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{4k^2-1}\frac{(2\nu-2k+1)!}{(2\nu+2k+1)!}J^{2k}_{2\nu+1,\ 2i}\frac{Q^{2k}_{2\nu+1}(\zeta)}{\dot Q^{2k}_{2\nu+1}(\zeta_0)}P^{2k}_{2\nu+1}(\mu)\cos 2k\omega\right\}\cos\Omega t. \qquad (3,4б)$$

Абсолютная и равномерная сходимость найденных решений в интервале $-1\leqslant\mu\leqslant 1$ для всех значений ζ_0 и любом s доказывается так же, как в предыдущем параграфе.

Подставляя в (2,10) выражения для потенциала скоростей (3,4а), (3,4б) и граничное условие (1,15) и принимая во внимание, что

$$\int_0^{\pi}\sin\omega\cos 2k\omega d\omega=-\frac{2}{4k^2-1},$$

получим для кинетической энергии жидкости выражение при нечетном s

$$2T=\frac{32\rho\varkappa\left(\zeta_0^2-1\right)^2}{\pi\zeta_0}\left[C_{2i+1}\dot Q^1_{2i+1}(\zeta_0)\right]^2\cos^2\Omega t\times$$

$$\times\sum_{\nu=0}^{\infty}(4\nu+1)\left\{\frac{1}{2}\left[J^0_{2\nu,\ 2i+1}\right]^2F^0_{2\nu}(\zeta_0)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{(4k^2-1)^2}\frac{(2\nu-2k)!}{(2\nu+2k)!}\left[J^{2k}_{2\nu,\ 2i+1}\right]^2F^{2k}_{2\nu}(\zeta_0)\right\}, \qquad (3,5а)$$

а при четном s

$$2T=\frac{32\rho\varkappa(\zeta_0^2-1)^2}{\pi\zeta_0}\left[C_{2i}\dot{Q}_{2i}^1(\zeta_0)\right]^2\cos^2\Omega t\times$$

$$\times\sum_{\nu=0}^{\infty}(4\nu+3)\left\{\frac{1}{2}\left[J^0_{2\nu+1,\,2i}\right]^2F^0_{2\nu+1}(\zeta_0)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{(4k^2-1)^2}\frac{(2\nu-2k+1)!}{(2\nu+2k+1)!}\left[J^{2k}_{2\nu+1,\,2i}\right]^2F^{2k}_{2\nu+1}(\zeta_0)\right\}. \qquad (3,5б)$$

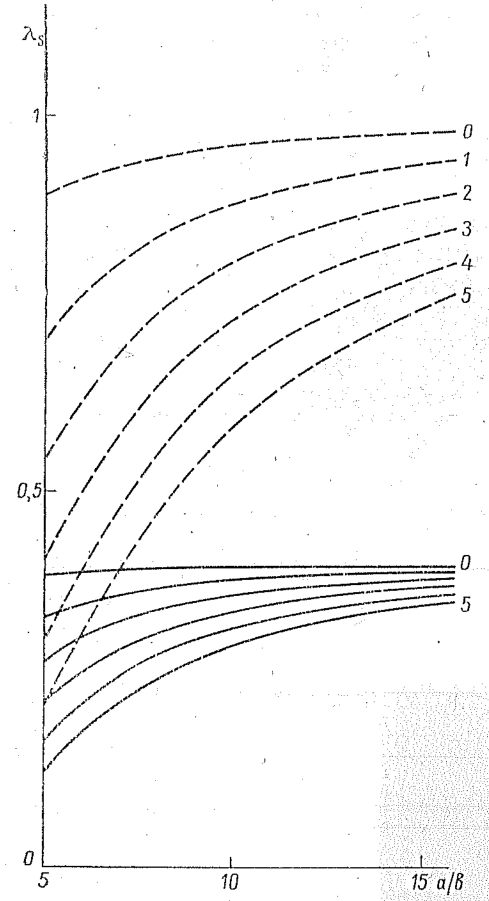

Рис. 1. Коэффициенты присоединенной массы λ_s эллипсоида вращения при горизонтальных (——) и вертикальных (------) колебаниях на поверхности невесомой жидкости.

Цифры около кривых показывают число узлов.

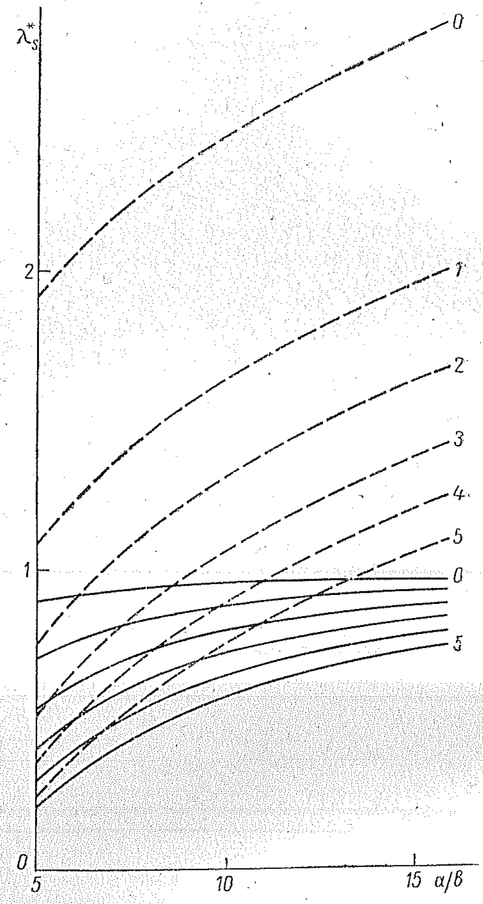

Рис. 2. Коэффициенты присоединенной массы λ_s^* эллипсоида вращения при горизонтальных (——) и вертикальных (------) колебаниях на поверхности весьма тяжелой жидкости.

Цифры около кривых показывают число узлов.

Относя кинетическую энергию жидкости к кинетической энергии эллипсоида (2,12) при $\rho_1=\rho$, получим для коэффициента присоединенной массы при вертикальных колебаниях эллипсоида вращения на поверхности весьма тяжелой жидкости выражения: при $s=2i+1$, т. е. при колебаниях с четным числом узлов,

$$\lambda_s^*=\frac{32}{\pi^2}\frac{2s+1}{2s(s+1)}\frac{\left[\frac{s-1}{\zeta_0^2}-(s-2)\right]^2}{f_s\left(\frac{1}{\zeta_0}\right)}\sum_{\nu=0}^{\infty}(4\nu+1)\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{2}\left[J^0_{2\nu,\,s}\right]^2F^0_{2\nu}(\zeta_0)+\sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{(4k^2-1)^2}\frac{(2\nu-2k)!}{(2\nu+2k)!}\left[J^{2k}_{2\nu,\,s}\right]^2F^{2k}_{2\nu}(\zeta_0)\right\}, \qquad (3,6а)$$

при $s=2i$, т. е. при колебаниях с нечетным числом узлов,

$$\lambda_s^*=\frac{32}{\pi^2}\frac{2s+1}{2s(s+1)}\frac{\left[\frac{s-1}{\zeta_0^2}-(s-2)\right]^2}{f_s\left(\frac{1}{\zeta_0}\right)}\sum_{\nu=0}^{\infty}(4\nu+3)\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{2}\left[J^0_{2\nu+1,\,s}\right]^2F^0_{2\nu+1}(\zeta_0)+\sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{(4k^2-1)^2}\frac{(2\nu-2k+1)!}{(2\nu+2k+1)!}\left[J^{2k}_{2\nu+1,\,s}\right]^2F^{2k}_{2\nu+1}(\zeta_0)\right\}. \qquad (3,6б)$$

Выражения (3,6а) и (3,6б) при $s=1,2$ совпадают с результатами работы [3] и дают точные значения коэффициентов присоединенной массы эллипсоида вращения при поступательном и вращательном движении. При $s\geqslant 3$ эти выражения являются приближенными, что следует из принятого допущения о форме колебаний.

По формулам (2,13) и (3,6) проведены расчеты для эллипсоидов с различным соотношением полуосей при колебаниях с числом узлов от 0 до 5. Результаты расчетов приведены на графиках (рис. 1 и 2).

Следует иметь в виду, что ряды (2,13) и (3,6) сходятся медленно и для получения удовлетворительной точности необходимо удерживать большое число членов ряда. Однако при использовании электронно-вычислительных машин это не очень существенно.

Автор благодарит П. Е. Товстика за советы и обсуждение работы.

Summary

The paper considers small lateral vibrations of an ellipsoid of revolution floating on the surface of an ideal incompressible fluid in two cases; Froud's number are $F\to\infty$ and $F=0$. Approximations of the velocity potentials are given on the supposition that the form of vibration is a parabola of n-order. The dependences of virtual masses on the relation of semi-axes of the ellipsoid and on number of node are shown on the diagrams.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Сабанеев. Присоединенные массы эллипсоида вращения при колебаниях в безграничной жидкости. Вестник ЛГУ, № 13, 1965.
2. Э. Л. Блох. Горизонтальный удар эллипсоида вращения об идеальную жидкость при наличии свободной поверхности. Прикладная математика и механика, XVII, вып. 6, 1953.
3. Э. Л. Блох. Об ударе эллипсоида вращения, плавающего на поверхности весьма тяжелой жидкости. Прикладная математика и механика, XVIII, вып. 5, 1954.

Статья поступила в редакцию 27 декабря 1967 г.