

В. С. Сабанеев

**БЕЗОТРЫВНЫЙ УДАР ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА,
ПЛАВАЮЩЕГО НА ПОВЕРХНОСТИ
НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ**

Задача о безотрывном ударе эллиптического цилиндра, плавающего на поверхности идеальной несжимаемой жидкости, заполняющей полупространство, решена Л. И. Седовым [1] для случая весьма больших чисел Фруда.

В данной заметке результаты работы [1] развиты в двух направлениях: учтено влияние стенки канала и рассмотрен случай, когда число Фруда близко к нулю (удар о весьма тяжелую жидкость).

1°. Постановка задачи. Предположим, что эллиптический цилиндр погружен наполовину, а канал имеет форму эллиптического полуцилиндра, конфокального с плавающим.

Введем систему координат Oxy : ось Ox расположим в плоскости свободной поверхности, ось Oy направим внутрь жидкости. Кроме того, введем систему эллиптических координат, положив:

$$\begin{aligned} x = k \operatorname{ch} \alpha \cos \beta & \quad \text{или} \quad x = k \operatorname{sh} \alpha \cos \beta, \quad 0 \leq \alpha < \infty, \\ y = k \operatorname{sh} \alpha \sin \beta & \quad \text{или} \quad y = k \operatorname{ch} \alpha \sin \beta, \quad 0 \leq \beta < 2\pi, \end{aligned} \quad (1,1)$$

соответственно тому, большая или малая ось поперечного сечения цилиндра лежит на свободной поверхности. Здесь k — половина фокусного расстояния.

Уравнение поверхности плавающего цилиндра имеет вид

$$\alpha = \alpha_1,$$

а уравнение поверхности канала

$$\alpha = \alpha_2, \quad 0 \leq \beta \leq \pi.$$

Потенциал скоростей Φ должен удовлетворять уравнению Лапласа во всем пространстве, занятом жидкостью, граничным условиям на поверхности тела и канала и граничному условию на свободной поверхности: при малых числах Фруда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad (1,2a)$$

при весьма больших числах Фруда

$$\Phi = 0 \quad \text{при} \quad y = 0. \quad (1,2б)$$

Известно, что условию (1,2a) можно удовлетворить, полагая, что „изображение“ смоченной части тела движется симметрично относительно свободной поверхности. Условию (1,2б) можно удовлетворить, полагая, что „изображение“ движется антисимметрично. Таким образом, рассматриваемая задача сводится к задаче с граничными условиями, заданными на всей поверхности цилиндра.

Потенциал скоростей Φ будем искать в виде

$$\Phi = U\varphi_1 + V\varphi_2 + \omega\varphi_3,$$

причем при малых числах Фруда φ_i должны удовлетворять следующим условиям:

во всем пространстве, занятом жидкостью ($\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$)

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \beta^2} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1,3)$$

на поверхности канала и его „изображения“ ($\alpha = \alpha_2$)

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1,4)$$

на поверхности цилиндра ($\alpha = \alpha_1$)

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} = \frac{\partial x}{\partial \alpha} = b \cos \beta, \quad (1,5)$$

где b — полуось поперечного сечения цилиндра ($b = k \operatorname{sh} \alpha_1$ при „горизонтальном“ расположении цилиндра, $b = k \operatorname{ch} \alpha_1$ при „вертикальном“ расположении);

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha} = \frac{\partial y}{\partial \alpha} \operatorname{sign} y = a \sin \beta \operatorname{sign} \sin \beta, \quad (1,6)$$

где $a = k \operatorname{ch} \alpha_1$ или $a = k \operatorname{sh} \alpha_1$ соответственно при „горизонтальном“ или „вертикальном“ расположении цилиндра;

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial \alpha} = \left(x \frac{\partial y}{\partial \alpha} - y \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) \operatorname{sign} y = \frac{1}{2} (a^2 - b^2) \sin 2\beta \operatorname{sign} \sin \beta. \quad (1,7)$$

При весьма больших числах Фруда потенциал скоростей $\bar{\Phi}$ будем искать в виде

$$\bar{\Phi} = U\bar{\varphi}_1 + V\bar{\varphi}_2 + \omega\bar{\varphi}_3,$$

причем $\bar{\varphi}_i$ должны удовлетворять условиям (1,3), (1,4) и условиям на поверхности цилиндра ($\alpha = \alpha_1$)

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_1}{\partial \alpha} = b \cos \beta \operatorname{sign} \sin \beta, \quad (1,8)$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_2}{\partial \alpha} = a \sin \beta, \quad (1,9)$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_3}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} (a^2 - b^2) \sin 2\beta. \quad (1,10)$$

2°. Потенциалы скоростей. Из граничного условия (1,5) видно, что задача о горизонтальном ударе эллиптического цилиндра, плавающего в канале, при малых числах Фруда совпадает с задачей о горизонтальном ударе эллиптического цилиндра в эллиптической трубе. Соответствующий потенциал скоростей имеет вид [2]

$$\varphi_1 = -b \frac{\operatorname{ch} (\alpha_2 - \alpha)}{\operatorname{sh} (\alpha_2 - \alpha_1)} \cos \beta. \quad (2,1)$$

Потенциал φ_3 при предположении о несжимаемости жидкости не существует. Для вычисления потенциала φ_3 разложим граничное условие (1,7) в ряд Фурье

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial \alpha} = -\frac{4}{\pi} (a^2 - b^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos (2n+1) \beta}{(2n-1)(2n+3)}. \quad (2,2)$$

Потенциал скоростей φ_3 будем искать в виде

$$\varphi_3 = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n e^{-(2n+1)\alpha} + B_n e^{(2n+1)\alpha}) \cos (2n+1) \beta.$$

Величины A_n и B_n легко определяются из граничных условий (1,4) и (2,2). Окончательно получим

$$\varphi_3 = \frac{4}{\pi} (a^2 - b^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos (2n+1) \beta \operatorname{ch} (2n+1) (\alpha_2 - \alpha)}{(4n^2 - 1)(2n+3) \operatorname{sh} (2n+1) (\alpha_2 - \alpha_1)}. \quad (2,3)$$

Переходя к пределу в (2,3) при $\alpha_2 \rightarrow \infty$, получим потенциал скоростей при вращательном ударе эллиптического цилиндра, который плавает на поверхности весьма тяжелой жидкости, заполняющей полупространство,

$$\varphi_3^* = \frac{4}{\pi} (a^2 - b^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{(2n+1) (\alpha_1 - \alpha)}}{(4n^2 - 1)(2n+3)} \cos (2n+1) \beta. \quad (2,4)$$

Для вычисления потенциала $\bar{\varphi}_1$ разложим граничное условие (1,8) в ряд Фурье

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_1}{\partial \alpha} = \frac{4b}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{4n^2 - 1} \sin 2n\beta. \quad (2,5)$$

Потенциал скоростей $\bar{\varphi}_1$ будем искать в виде

$$\bar{\varphi}_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n e^{-2n\alpha} + D_n e^{2n\alpha}) \sin 2n\beta.$$

Величины C_n и D_n определим из граничных условий (1,4) и (2,5). Окончательно получим

$$\bar{\varphi}_1 = -\frac{4b}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \frac{\operatorname{ch} 2n (\alpha_2 - \alpha)}{\operatorname{sh} 2n (\alpha_2 - \alpha_1)} \sin 2n\beta. \quad (2,6)$$

Переходя к пределу в (2,6) при $\alpha_2 \rightarrow \infty$, получим потенциал скоростей при горизонтальном ударе эллиптического цилиндра, который плавает на свободной поверхности жидкости, заполняющей полупространство, при весьма больших числах Фруда

$$\bar{\varphi}_1^* = -\frac{4b}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2n (\alpha_1 - \alpha)}}{4n^2 - 1} \sin 2n\beta. \quad (2,7)$$

Из выражения (2,6) путем предельного перехода ($k \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow \infty$, $ke^\alpha \rightarrow 2r$) можно получить потенциал скоростей при горизонтальном ударе круглого цилиндра, плавающего в концентрическом полукруглом канале,

$$\bar{\varphi}_1^{**} = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_1^{2n+1}}{r_2^{4n} - r_1^{4n}} \left(r^{2n} + \frac{r_2^{4n}}{r^{2n}} \right) \frac{\sin 2n\beta}{4n^2 - 1}, \quad (2,8)$$

где r_1 — радиус плавающего цилиндра, r_2 — радиус канала, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Из граничных условий (1,9) и (1,10) следует, что потенциалы $\bar{\varphi}_2$ и $\bar{\varphi}_3$ должны совпадать с известными потенциалами при соответствующих движениях эллиптического цилиндра в эллиптической трубе [2]

$$\bar{\varphi}_2 = -a \frac{\operatorname{ch}(a_2 - a)}{\operatorname{sh}(a_2 - a_1)} \sin \beta, \quad (2,9)$$

$$\bar{\varphi}_3 = -\frac{a^2 - b^2}{4} \frac{\operatorname{ch} 2(a_2 - a)}{\operatorname{sh} 2(a_2 - a_1)} \sin 2\beta. \quad (2,10)$$

3°. Присоединенные массы. Как известно, присоединенные массы определяются по формуле

$$\lambda_{ik} = -\rho \iint \varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} dS,$$

причем интегрирование производится по смоченной поверхности плавающего тела.

Для тела, имеющего форму эллиптического цилиндра, в эллиптической системе координат имеем

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial n} = \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \alpha}, \quad dS = H_\beta d\beta,$$

где $H_\alpha = H_\beta$ — коэффициенты Ляме.

Следовательно, в рассматриваемой задаче

$$\lambda_{ik} = -\rho \int_0^\pi \varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial \alpha} d\beta. \quad (3,1)$$

Подставляя в (3,1) выражения для потенциалов скоростей (2,1), (2,3) и граничные условия (1,5), (1,7), получим присоединенные массы эллиптического цилиндра при ударе о весьма тяжелую жидкость, заполняющую канал,

$$\lambda_{11} = \frac{1}{2} \rho \pi b^2 \operatorname{cth}(a_2 - a_1),$$

$$\lambda_{33} = \frac{8}{\pi} \rho (a^2 - b^2)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{cth}(2n+1)(a_2 - a_1)}{(2n+1)(2n-1)^2(2n+3)^2}, \quad (3,2)$$

$$\lambda_{13} = \frac{2}{3} \rho b (a^2 - b^2) \operatorname{cth}(a_2 - a_1).$$

Переходя в (3,2) к пределу при $a_2 \rightarrow \infty$, получим присоединенные массы эллиптического цилиндра при ударе о весьма тяжелую жидкость, заполняющую полупространство,

$$\lambda_{11}^* = \frac{1}{2} \rho \pi b^2, \quad \lambda_{13}^* = \frac{2}{3} \rho b (a^2 - b^2),$$

$$\lambda_{33}^* = \frac{8}{\pi} \rho (a^2 - b^2)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n-1)^2(2n+3)^2} = \frac{\rho}{\pi} (a^2 - b^2)^2. \quad (3,3)$$

Подставляя в (3,1) выражения для потенциалов скоростей (2,6), (2,9), (2,10) и граничные условия (1,8)–(1,10), получим присоединенные массы при ударе о жидкость, заполняющую канал, в случае весьма больших чисел Фруда

$$\bar{\lambda}_{11} = \frac{16}{\pi} \rho b^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \operatorname{cth} 2n(a_2 - a_1)}{(4n^2 - 1)^2},$$

$$\bar{\lambda}_{22} = \frac{1}{2} \rho \pi a^2 \operatorname{cth}(a_2 - a_1), \quad (3,4)$$

$$\bar{\lambda}_{33} = \frac{1}{16} \rho \pi (a^2 - b^2)^2 \operatorname{cth} 2(a_2 - a_1),$$

$$\bar{\lambda}_{13} = \frac{1}{3} \rho b (a^2 - b^2) \operatorname{cth} 2(a_2 - a_1).$$

Выражение для $\bar{\lambda}_{22}$ получено в работе [3].

Переходя в (3,4) к пределу при $a_2 \rightarrow \infty$, получим известные величины присоединенных масс при ударе эллиптического цилиндра о жидкость, заполняющую полупространство [1],

$$\bar{\lambda}_{11}^* = \frac{2}{\pi} \rho b^2, \quad \bar{\lambda}_{13}^* = \frac{1}{3} \rho b (a^2 - b^2), \quad (3,5)$$

$$\bar{\lambda}_{22}^* = \frac{1}{2} \rho \pi a^2, \quad \bar{\lambda}_{33}^* = \frac{1}{16} \rho \pi (a^2 - b^2)^2.$$

4°. Частные случаи. Полагая в (3,2) $a_1 = 0$, $a = k$, $b = 0$, получим присоединенные массы пластинки шириной $2k$, которая плавает на поверхности весьма тяжелой жидкости, заполняющей канал,

$$\lambda_{11} = \lambda_{13} = 0, \quad \lambda_{33} = \frac{8}{\pi} \rho k^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{cth}(2n+1)a_2}{(2n+1)(2n-1)^2(2n+3)^2}. \quad (4,1)$$

В частности, при вращательном ударе о поверхность весьма тяжелой жидкости, заполняющей полупространство, имеем

$$\lambda_{33}^* = \frac{\rho}{\pi} k^4. \quad (4,2)$$

Полагая в (3,2) $a_1 = 0$, $a = 0$, $b = k$, можно получить присоединенные массы вертикальной пластинки, которая погружена наполовину в весьма тяжелую жидкость, заполняющую канал. В частности, когда жидкость заполняет полупространство, имеем

$$\lambda_{11}^* = \frac{1}{2} \rho \pi k^2, \quad \lambda_{33}^* = \frac{\rho}{\pi} k^4, \quad \lambda_{13}^* = -\frac{2}{3} \rho k^3. \quad (4,3)$$

Полагая в (3,4) $a_1 = 0$, $a = k$, $b = 0$, получим присоединенные массы горизонтальной пластинки шириной $2k$, которая плавает на поверхности жидкости, заполняющей канал, при весьма больших числах Фруда

$$\bar{\lambda}_{11} = \bar{\lambda}_{13} = 0, \quad \bar{\lambda}_{22} = \frac{1}{2} \rho \pi k^2 \operatorname{cth} a_2, \quad \bar{\lambda}_{33} = \frac{1}{16} \rho \pi k^4 \operatorname{cth} 2a_2. \quad (4,4)$$

В случае, когда жидкость заполняет все полупространство, имеем

$$\bar{\lambda}_{22}^* = \frac{1}{2} \rho \pi k^2, \quad \bar{\lambda}_{33}^* = \frac{1}{16} \rho \pi k^4, \quad (4,5)$$

что совпадает с результатами работ [4], [5].

Полагая в (3,4) $a_1 = 0$, $a = 0$, $b = k$, можно получить присоединенные массы вертикальной пластинки, которая погружена наполовину в жидкость, заполняющую канал, в случае весьма больших чисел

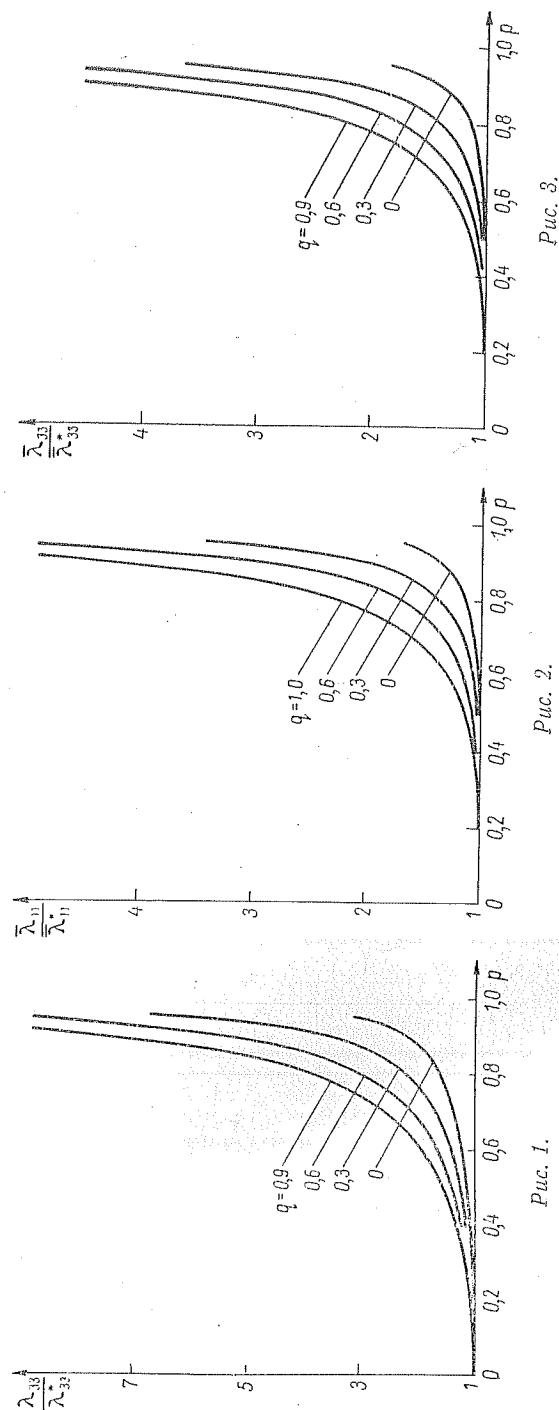


Рис. 1.

Рис. 2.

Рис. 3.

Фруда. В частном случае, когда жидкость заполняет все полупространство, имеем

$$\bar{\lambda}_{11}^* = \frac{2}{\pi} \rho k^3, \quad \bar{\lambda}_{22}^* = 0, \quad \bar{\lambda}_{33}^* = \frac{1}{16} \rho \pi k^4, \quad \bar{\lambda}_{13}^* = -\frac{1}{3} \rho k^3, \quad (4,6)$$

что совпадает с результатами работы [1].

Подставляя в (3,1) выражение для потенциала скоростей (2,8) и граничное условие (1,8), получим присоединенную массу при горизонтальном ударе круглого цилиндра, плавающего в концентрическом канале (при весьма больших числах Фруда)

$$\bar{\lambda}_{11}^{**} = \frac{16}{\pi} \rho r_1^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n^2 - 1)^2} \frac{r_2^{4n} + r_1^{4n}}{r_2^{4n} - r_1^{4n}}. \quad (4,7)$$

На рис. 1—3 приведены графики величин $\lambda_{33}/\lambda_{33}^*$, $\bar{\lambda}_{11}/\bar{\lambda}_{11}^*$ и $\bar{\lambda}_{33}/\bar{\lambda}_{33}^* = \bar{\lambda}_{13}/\bar{\lambda}_{13}^*$. На всех графиках по оси абсцисс отложено отношение больших полуосей цилиндра и сечения канала (при любом расположении цилиндра) $p = \text{ch } \alpha_1 / \text{ch } \alpha_2$. Форма плавающего цилиндра характеризуется величиной $q = \text{th } \alpha_1$ (при „горизонтальном“ расположении цилиндра $q = b/a$, при „вертикальном“ — $q = a/b$).

График величины $\bar{\lambda}_{22}/\bar{\lambda}_{22}^*$ приведен в работе [3]. Как видно из (3.2) и (3,3), его можно использовать и для нахождения $\lambda_{11}/\lambda_{11}^* = \lambda_{13}/\lambda_{13}^*$.

Summary

The problem on the attached impact of an elliptic cylinder floating on the surface of an ideal incompressible fluid occupying a semi-space was solved by L. I. Sedov for Froude's number $F \rightarrow \infty$.

In this article Sedov's result is developed in two trends: 1) attention was paid to the influence of the canal's wall; 2) and to the case $F = 0$ (an impact on a very heavy fluid).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. И. Седов. Об ударе твердого тела, плавающего на поверхности несжимаемой жидкости. Труды ЦАГИ, № 187, 1934.
2. A. G. Greenhill. Fluid motion between confocal elliptic cylinders and confocal ellipsoids. Quart. J. Pure a. Appl. Math., 16, 1879.
3. В. М. Ботвинков, А. М. Полунин. Пять задач о влиянии твердого экрана на присоединенную массу плавающих цилиндрических тел при вертикальном ударе. Изв. АН СССР, механика жидкости и газа, № 1, 1969.
4. Сборник статей по вопросам удара о поверхность воды. Труды ЦАГИ, № 152, 1935.
5. М. И. Гуревич. Удар плоской пластинки о жидкость, наполняющую канал в форме полуплоскости. Прикладная математика и механика, 3, № 2, 1939.

Статья поступила в редакцию 29 апреля 1969 г.