ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РАЗРЕЖЕНИЯ МАТРИЦ ДЛЯ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТРОПИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

SOLUTION OF MULTIDIMENSIONAL TROPICAL OPTIMIZATION PROBLEM WITH THE USE OF MATRIX SPARSIFICATION

Д-р ф.-м. н. Кривулин Н. К.[1], аспирант Сорокин В. Н.[2]
Математико-механический факультет – Санкт-Петербургский государственный университет, Россия
nkk@math.spbu.ru[1], SovanSB@gmail.com[2]

Abstract: *A complete solution is proposed for a problem of vector-valued function minimization with elements from a tropical (idempotent) semifield. The tropical optimization problem, considered here, arises when one needs, for instance, to find the best, in the sense of Chebyshev metric, approximate solution for tropical vector equations, and occurs in various applications, including scheduling, location and decision-making problems. To solve the problem, first, the minimum value of the objective function is obtained, a characterization of the solution set in the form of a system of inequalities is proposed, and one of the solutions is presented. Then, with introduction of matrix sparsification into the problem, an extended set of solutions, and then a complete solution in the form of a family of subsets are derived. Procedures, allowing to reduce the number of subsets, which one needs to examine when constructing the complete solution, are described in the present paper. It is shown how the complete solution can be represented in parametric way in a compact vector form.*

Keywords: idempotent semifield, tropical optimization, Chebyshev approximation, complete solution, matrix sparsification

1. Введение

Тропическая (идемпотентная) алгебра представляет собой раздел математики, который изучает свойства полуколец и полуполей с идемпотентным сложением и их приложения. Исследованиям в этой области посвящено немало работ, включая [1 - 7]. а также детальный обзор литературы в [8]. Одним из направлений развития тропической математики является разработка методов решения задач оптимизации, которые могут быть сформулированы и решены в терминах идемпотентной математики (задач тропической оптимизации). Имеется целый ряд практических задач (см., например, [9 - 12]), которые сводятся к наилучшему приближенному решению в смысле метрики Чебышева векторного уравнения $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}$, где $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{p}$ обозначают заданные матрицу и вектор, $\boldsymbol{x}$ — неизвестный вектор, а произведение матрицы на вектор понимается в смысле тропической математики.

Проблема чебышевской аппроксимации для решения рассматриваемого уравнения сводится к задаче поиска векторов $\boldsymbol{x}$, на которых достигается минимум в задаче

$$\min \quad (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{-}\boldsymbol{p}\oplus\boldsymbol{p}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

где матричные и векторные операции понимаются в смысле идемпотентной алгебры.

Исследованию задачи посвящен ряд работ, опубликованных в различное время, включая [3, 10, 12, 13,]. Представленные в этих работах результаты обычно сводятся к получению одного из решений и не позволяют найти все множество решений задачи.

Для решения задачи в статьях [13 - 16] предлагается подход, при котором вводится дополнительный параметр для обозначения минимума целевой функции, а затем задача сводится к решению параметризованных неравенств. С помощью такого подхода были получены решения в компактной векторной форме для рассматриваемой задачи, а также некоторых ее вариантов, включая задачи с ограничениями.

Цель настоящей работы состоит в исследовании и решении задачи тропической оптимизации с целевой функцией более общего вида. На основе применения методов решения с использованием разреженных матриц, разработанного в [17], находится полное решение задачи и его представление в компактной векторной форме.

Работа построена следующим образом. Сначала находится минимальное значение целевой функции задачи, предлагается описание множества решений в форме системы неравенств и приводится одно из решений. Далее с помощью разрежения матрицы задачи находится расширенное множество решений, а затем полное решение в виде некоторого семейства подмножеств. Предлагаются процедуры, позволяющие сократить число подмножеств, которые необходимо исследовать при построении полного решения.

2. Элементы тропической алгебры

Рассмотрим необходимые в дальнейшем основные понятия и предварительные результаты тропической (идемпотентной) алгебры [1 - 7]. Идемпотентное полукольцо определяется как набор $\langle\boldsymbol{X},\oplus,\otimes,\mathbf{0},\mathbf{1}\rangle$, где $\boldsymbol{X}$ обозначает непустое множество с заданными на нем операциями сложения $\oplus$ с нейтральным элементом $\mathbf{0}$ (ноль) и умножения $\otimes$ с нейтральным элементом $\mathbf{1}$ (единица).

Сложение идемпотентно: для любого элемента $x\in\boldsymbol{X}$ выполняется равенство $x\oplus x=x$. Умножение обратимо: для любого $x\neq\mathbf{0}$ существует x^{-1} такой, что $x\otimes x^{-1}=\mathbf{1}$.

Идемпотентность сложения задает на множестве $\boldsymbol{X}$ частичный порядок: $x\leq y$ тогда и только тогда, когда $x\oplus y=y$. Отсюда следует, что неравенство $x\oplus y\leq z$ эквивалентно двум неравенствам $x\leq z$ и $y\leq z$. Будем предполагать, что указанный частичный порядок продолжен до линейного на множестве $\boldsymbol{X}$. Целые степени степени определяются обычным образом: $x^0=\mathbf{1}$, $x^p=x\otimes x^{p-1}$, $x^{-p}=(x^{-1})^p$, $\mathbf{0}^p=\mathbf{0}$ для всех $x\neq\mathbf{0}$ и натуральных p. В дальнейшем будем считать полуполе алгебраически полным в том смысле, что введенная операция возведения в степень может быть распространена на случай степеней с рациональным показателем. Далее символ $\otimes$ будем опускать для упрощения записи.

В прикладных задачах часто встречаются следующие вещественные идемпотентные полуполя: $\boldsymbol{R}_{\max,+}=\langle\boldsymbol{R}\cup\{-\infty\},\max,+,-\infty,0\rangle$, $\boldsymbol{R}_{\min,+}=\langle\boldsymbol{R}\cup\{+\infty\},\min,+,+\infty,0\rangle$, $\boldsymbol{R}_{\max,\times}=\langle\boldsymbol{R}_{+}\cup\{0\},\max,\times,0,1\rangle$ и $\boldsymbol{R}_{\min,\times}=\langle\boldsymbol{R}_{+}\cup\{+\infty\},\min,\times,+\infty,1\rangle$. Здесь $\boldsymbol{R}_{+}=\{x\in\boldsymbol{R}|x>0\}$ — множество положительных вещественных чисел.

Рассмотрим полуполе $\boldsymbol{R}_{\max,+}$, которое обычно называют $(\max,+)$-алгеброй. В нем множество $\boldsymbol{X}$ определено как множество действительных чисел $\boldsymbol{R}$, расширенное путем добавления числа $-\infty$. Роль тропического сложения играет операция взятия максимума, а в качестве умножения берется арифметическое сложение. Для любого $x\neq\mathbf{0}$ существует обратный по умножению элемент x^{-1}, равный противоположному числу $-x$ в обычной арифметике. Степень x^y определена для всех $x,y\in\boldsymbol{R}$ и соответствует арифметическому произведению xy. Индуцированный идемпотентным сложением порядок совпадает с обычным линейным порядком на $\boldsymbol{R}$.

Обозначим через $\boldsymbol{X}^{m\times n}$ множество матриц размера $m\times n$ над полуполем $\boldsymbol{X}$.

В нулевой матрице все элементы равны $\mathbf{0}$. Матрицу, в которой отсутствуют нулевые строки (столбцы), назовем регулярной по строкам (столбцам). Матрица без нулевых строк и нулевых столбцов называется регулярной.

Операции над матрицами выполняются по стандартным правилам с заменой обычных скалярных операций сложения и умножения на тропические. Будем называть мультипликативно сопряженным транспонированием ненулевой матрицы $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{X}^{m\times n}$ операцию преобразования в матрицу $\boldsymbol{A}^{-}\in\boldsymbol{X}^{n\times m}$, элементы которой определяются по правилу: $a_{ij}^{-}=a_{ji}^{-1}$, если $a_{ji}\neq\mathbf{0}$, и $a_{ij}^{-}=\mathbf{0}$ в противном случае.

Рассмотрим множество $\boldsymbol{X}^{n\times n}$ квадратных матриц порядка n. Матрица является диагональной, если все ее недиагональные элементы равны нулю. Единичной называется диагональная матрица I, у которой все элементы на диагонали равны единице.

Для регулярных по строкам матриц $\boldsymbol{A}$ выполняется неравенство $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}\geq\boldsymbol{I}$.

Матрица, состоящая из одного столбца (строки), образует вектор-столбец (вектор-строку). Далее все векторы, если не указано иначе, считаются вектор-столбцами. Множество вектор-столбцов размерности n обозначим через $\boldsymbol{X}^{n}$. Нулевой вектор имеет все компоненты равными $\mathbf{0}$. Вектор -- регулярный, если у него нет нулевых компонент. Вектор, все компоненты которого равны $\mathbf{1}$, обозначается как $\boldsymbol{e}=(\mathbf{1},\dots,\mathbf{1})^{T}$.

Для ненулевого вектора $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}^{n}$ справедливо равенство $\boldsymbol{x}^{-}\boldsymbol{x}=\mathbf{1}$. Если вектор $\boldsymbol{x}$ является регулярным, то выполняется неравенство $\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{-}\geq\boldsymbol{I}$.

Выпуклой линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_k$ называется выражение вида $u_1\boldsymbol{x}_1\oplus\cdots\oplus u_k\boldsymbol{x}_k$, где числа $u_1,\dots,u_k$ удовлетворяют условию $u_1\oplus\cdots\oplus u_k=\mathbf{1}$. Это условие означает, что $u_i\leq\mathbf{1}$ для всех индексов $i=1,\dots,k$, и по крайней мере для одного i выполняется равенство $u_i=\mathbf{1}$.

Пусть заданы матрица $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{X}^{m\times n}$, а также вектор $\boldsymbol{d}\in\boldsymbol{X}^{m}$, и требуется найти все векторы $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}^{n}$, удовлетворяющие неравенству

(1) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leq\boldsymbol{d}$.

Решение этой задачи обеспечивается следующим утверждением, полное доказательство которого приводится, например, в работах [7, 18].

***Лемма* 1.1** *Для любой регулярной по столбцам матрицы $\boldsymbol{A}$ и регулярного вектора $\boldsymbol{d}$ решение неравенства (1) имеет вид*

$$\boldsymbol{x}\leq(\boldsymbol{d}^{-}\boldsymbol{A})^{-}.$$

3. Задачи тропической оптимизации

Задачи тропической оптимизации обычно состоят в минимизации или максимизации некоторой целевой функции, заданной на векторах над идемпотентным полуполем. Такие задачи возникают, например, при исследовании уравнения $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}$, для которого требуется найти точное или приближенное решение [3, 10 - 12].

Сначала предположим, что заданы матрица $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{X}^{n\times n}$ и вектор $\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{X}^{n}$. Пусть требуется найти регулярные векторы $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}^{n}$, которые решают задачу

(1) min $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{-}\boldsymbol{p}\oplus\boldsymbol{p}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

Решение этой задачи обеспечивает наилучшее приближенное решение уравнения $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}$ в смысле чебышевской метрики. Исследование задачи было проведено, например, в работах [13, 15, 16], где приводится частичное решение в следующем виде.

Лемма 2 *Для любых регулярных матрицы $\boldsymbol{A}$ и вектора $\boldsymbol{p}$ минимум в задаче (2) равен $\Delta=((\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}^{-}\boldsymbol{A})^{-})^{-}\boldsymbol{p})^{1/2}$ и достигается при $\boldsymbol{x}=\Delta(\boldsymbol{p}^{-}\boldsymbol{A})^{-}$.*

Обобщением задачи (2) с дополнительным вектором $\mathbf{q}\in\mathbf{X}^{n}$ является задача нахождения регулярных векторов $\mathbf{x}$, которые обеспечивают

(2) min $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{-}\boldsymbol{p}\oplus\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

В настоящей работе задача (3) рассматривается в следующей форме. Пусть заданы матрица $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{X}^{n\times n}$ и векторы $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{X}^{n}$. Требуется найти все регулярные векторы $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}^{n}$, на которых достигается

(3) min $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{-}\boldsymbol{p}\oplus\boldsymbol{q}^{-}\boldsymbol{x}$.

В работах [14, 16] было получено частичное решение этой задачи.

Ниже для решения задачи (4) сначала также, как в работах [14, 16], будет определен минимум целевой функции и получено одно из решений. Затем для полного решения задачи строится система неравенств, которая определяет множество всех решений. На основе использования разреженных матриц находится более широкое множество решений, а затем полное решение задачи в форме семейства подмножеств решений.

4. Предварительный анализ

Цель этого раздела состоит в том, чтобы найти минимум целевой функции, охарактеризовать множество решений и описать некоторые свойства этого множества. Для этого будем использовать подход [14 - 16, 18], при котором вводится параметр для обозначения минимума целевой функции, а затем задача оптимизации сводится к решению параметризованного неравенства. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3 *Пусть $\boldsymbol{A}$ -- регулярная по строкам матрица, а $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ -- регулярные векторы. Тогда минимум в задаче (4) равен*

(4) $\Delta=((\boldsymbol{A}\boldsymbol{q})^{-}\boldsymbol{p})^{1/2}$,

а все регулярные решения x определяются системой неравенств

(5) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geq\Delta^{-1}\boldsymbol{p}$, $\quad\boldsymbol{x}\leq\Delta\boldsymbol{q}$.

В частности, минимум достигается при $\boldsymbol{x}=\Delta\boldsymbol{q}$.

Путем прямой подстановки и проверки на соответствие системе (6) доказывается следующий факт.

Следствие 4 *Множество решений задачи (4) вместе с любыми решениями содержит их всевозможные выпуклые линейные комбинации.*

Для расширения множества решений задачи (4) применим метод с использованием разрежения матриц, предложенный в [17]. Сначала преобразуем матрицу задачи $\mathbf{A}=(a_{ij})$ в разреженную матрицу $\widehat{\mathbf{A}}=(\hat{a}_{ij})$, приравнивая к нулю все элементы, которые строго меньше порогового значения по следующему правилу:

$$\hat{a}_{ij}=\begin{cases}a_{ij}, & \text{если } a_{ij}\geq\Delta^{2}p_iq_j^{-1};\\ \mathbf{0}, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Далее матрицу $\widehat{\mathbf{A}}$, полученную при помощи такого преобразования, будем называть разреженной матрицей задачи. Ее свойства отражает следующий результат.

Лемма 5 *Замена матрицы $\boldsymbol{A}$ на $\widehat{\boldsymbol{A}}$ не меняет множество решений задачи (4).*

Заметим, что ненулевые элементы матрицы $\widehat{\mathbf{A}}$ отвечают условию $\hat{a}_{ij}\geq\Delta^{-2}p_iq_j^{-1}$. Тогда для элементов матрицы $\widehat{\boldsymbol{A}}^{-}=(\hat{a}_{ij}^{-})$ справедливо соотношение $\hat{a}_{ij}^{-}\leq\Delta^{2}q_ip_j^{-1}$. В матричной форме имеем неравенство $\widehat{\boldsymbol{A}}^{-}\leq\Delta^{2}\boldsymbol{q}\boldsymbol{p}^{-}$, которое будет использовано ниже.

5. *Полное решение задачи*

В этом разделе будет представлено полное решение задачи (4) в виде семейства решений, которое задается множеством матриц, полученных из разреженной матрицы задачи путем дальнейшего обнуления ее элементов.

Начнем с того, что расширим решение $\boldsymbol{x} = \Delta\boldsymbol{q}$, полученное в лемме 3, до некоторого множества с помощью следующего утверждения.

Лемма 6 *Пусть $\boldsymbol{A}$ -- регулярная по строкам разреженная матрица задачи (4), где $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ -- регулярные векторы, и $\Delta = ((\boldsymbol{A}\boldsymbol{q})^{-}\boldsymbol{p})^{1/2}$. Тогда минимум в задаче (4) равен Δ и достигается на любом векторе $\boldsymbol{x}$, который удовлетворяет условию*

$$(6) \quad \Delta^{-1}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{x} \leq \Delta\boldsymbol{q}.$$

Теперь можно сформулировать лемму, которая обеспечивает полное решение задачи (4).

Лемма 7 *Пусть $\boldsymbol{A}$ -- регулярная по строкам разреженная матрица задачи (4), где $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ -- регулярные векторы, и $\Delta = ((\boldsymbol{A}\boldsymbol{q})^{-}\boldsymbol{p})^{1/2}$. Обозначим через $\mathcal{A}$ множество матриц, полученных из $\boldsymbol{A}$ путем сохранения по одному ненулевому элементу в каждой строке и обнулением остальных.*

Тогда минимум в задаче (4) равен Δ, а все регулярные решения $\mathbf{x}$ образуют семейство решений, каждое из которых определяется условием

$$(7) \quad \Delta^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-}\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{x} \leq \Delta\boldsymbol{q}, \qquad \boldsymbol{A}_1 \in \mathcal{A}.$$

Отметим, что у различных множеств решений из семейства, описанного в лемме 7, могут быть пересекающиеся подмножества.

Решение в параметрическом виде предоставляет следующая теорема.

Теорема 8 *Пусть $\boldsymbol{A}$ -- регулярная по строкам разреженная матрица задачи (4), где $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ -- регулярные векторы, и $\Delta = ((\boldsymbol{A}\boldsymbol{q})^{-}\boldsymbol{p})^{1/2}$. Обозначим через $\mathcal{A}$ множество матриц, полученных из $\boldsymbol{A}$ путем сохранения по одному ненулевому элементу в каждой строке и обнулением остальных, а через $\boldsymbol{B}$ -- матрицу, столбцами которой являются векторы $\boldsymbol{b}_1 = \Delta^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-}\boldsymbol{p}$ для всех матриц $\boldsymbol{A}_1 \in \mathcal{A}$.*

Тогда минимум в задаче (4) равен Δ, а все регулярные решения $\mathbf{x}$ имеют вид

$$(8) \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{v} \leq \Delta\boldsymbol{q}, \qquad \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{u} = \mathbf{1}.$$

В качестве следствия полученного результата представим решение задачи (2), которая является частным случаем задачи (4).

Следствие 9 *Пусть $\boldsymbol{A}$ -- регулярная по строкам разреженная матрица задачи (2), где $\boldsymbol{p}$ -- регулярный вектор и $\Delta = ((\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}^{-}\boldsymbol{A})^{-})^{-}\boldsymbol{p})^{1/2}$. Обозначим через $\mathcal{A}$ множество матриц, полученных из $\boldsymbol{A}$ путем сохранения по одному ненулевому элементу в каждой строке и обнулением остальных, а через $\boldsymbol{B}$ -- матрицу, столбцами которой являются векторы $\boldsymbol{b}_1 = \Delta^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-}\boldsymbol{p}$ для всех матриц $\boldsymbol{A}_1 \in \mathcal{A}$.*

Тогда минимум в задаче (4) равен Δ, а все регулярные решения $\mathbf{x}$ имеют вид

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{v} \leq \Delta(\boldsymbol{p}^{-}\boldsymbol{A})^{-}, \qquad \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{u} = \mathbf{1}.$$

6. *Процедуры построения решения*

Перебор всевозможных матриц $\boldsymbol{A}_1 \in \mathcal{A}$ для построения подмножеств семейства решений задачи в соответствии с результатом теоремы 8 может представлять определенные трудности. Ниже описываются процедуры, позволяющие во многих случаях сократить число подмножеств, которые необходимо учесть при построении общего решения.

Рассмотрим следующую процедуру построения нижних границ в неравенстве (8) для семейства решений, которая заключается в последовательным выборе по одному ненулевому элементу в строках разреженной матрицы $\widehat{\boldsymbol{A}}$.

Предположим, что в матрице $\widehat{\boldsymbol{A}}$ зафиксированы элементы в некоторых строках, в результате чего получена матрица $\widetilde{\boldsymbol{A}} = (\tilde{a}_{ij})$. Пусть выбран ненулевой элемент в одной из оставшихся строк, например элемент $\tilde{a}_{rj}$ в строке r и столбце j, значение которого фиксируется, а остальные элементы в этой строке замещаются нулями.

Всякий вектор $\boldsymbol{x} = (x_i)$, который является решением задачи (4), удовлетворяет системе (6), в частности, ее первому неравенству в форме $\widetilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x} \geq \Delta^{-1}\boldsymbol{p}$. Скалярное неравенство для строки r, где все элементы кроме $\tilde{a}_{rj}$ равны $\mathbf{0}$, записывается в виде $\tilde{a}_{rj}x_j \geq \Delta^{-1}p_r$, что эквивалентно неравенству $x_j \geq \Delta^{-1}\tilde{a}_{rj}^{-1}p_r$.

В столбце j возьмем элемент $\tilde{a}_{sj}$, который расположен в одной из еще не рассмотренных строк s. При выполнении условия $\tilde{a}_{sj}p_s^{-1} \geq \tilde{a}_{rj}p_r^{-1}$, которое эквивалентно условию $\tilde{a}_{sj} \geq \tilde{a}_{rj}p_r^{-1}p_s$, имеем $\tilde{a}_{sj}x_j \geq \tilde{a}_{rj}p_r^{-1}p_s\Delta^{-1}\tilde{a}_{rj}^{-1}p_r \geq \Delta^{-1}p_s$. Тогда неравенство $a_{s1}x_1 \oplus \cdots \oplus a_{sn}x_n \geq \Delta^{-1}p_s$ в системе (6) выполняется вне зависимости от значений x_l для всех $l \neq j$. В этом случае дальнейшее исследование ненулевых элементов $\tilde{a}_{sl}$ в строке s не может дать новых решений. Эти элементы можно заменить нулями, не нарушая неравенство, что уменьшает число альтернатив, которые требуется рассмотреть.

Заметим, что для проверки условия $\tilde{a}_{sj}p_s^{-1} \geq \tilde{a}_{rj}p_r^{-1}$ удобно предварительно умножить каждую строку i матрицы $\widehat{\mathbf{A}}$ на элемент p_i^{-1}, а затем исследовать элементы полученной матрицы, которую обозначим через $\widehat{\boldsymbol{A}}' = (\hat{a}_{ij}')$.

Если в какой-то строке матрицы $\widehat{\mathbf{A}}'$ преобладают элементы, являющиеся минимальными ненулевыми элементами в своих столбцах, то, вероятно, стоит начать перебор с подобной строки. Это позволит поочередно фиксировать такие элементы и не рассматривать строки, содержащие остальные ненулевые элементы соответствующих столбцов, а при отсутствии в таком столбце нулевых элементов сразу получать одну из границ.

Отсюда видно, что выбор строки в матрице может сыграть существенную роль для уменьшения количества рассматриваемых подмножеств семейства решений.

Некоторые нижние границы подмножеств, полученные с помощью процедуры построения полного семейства решений, могут быть несущественными в том смысле, что их удаление не повлияет на полученное множество решений. Нетрудно видеть, например, что если для каких-то двух границ $\boldsymbol{b}_i$ и $\boldsymbol{b}_j$ выполняется неравенство $\boldsymbol{b}_i \leq \boldsymbol{b}_j$, то граница $\boldsymbol{b}_j$ может быть удалена из списка без потери решений.

Сформулируем критерий для отбрасывания несущественных границ.

Предложение 10 *Пусть $\boldsymbol{B}$ -- матрица, столбцы которой определяют нижние границы для некоторого набора подмножеств семейства решений (8), а $\boldsymbol{b}_1 = \Delta^{-1}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{p}$, где $\boldsymbol{A}_1 \in \mathcal{A}$, -- еще одна граница. Тогда граница $\boldsymbol{b}_1$ является несущественной, если выполняется неравенство*

$$(9) \quad \boldsymbol{e}^T(\boldsymbol{b}_1^{-}\boldsymbol{B})^{-} \geq \mathbf{1}.$$

7. *Заключение*

В работе было получено полное решение задачи минимизации функции, заданной на векторах с элементами из тропического (идемпотентного) полуполя. Решение этой задачи, в частности, обеспечивает наилучшее приближенное решение уравнения $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}$ в смысле чебышевской метрики. Ее исследование уже проводилось в работах [13 - 16], где, однако, было найдено только частичное решение.

Для вывода полного решения вначале представлено частичное решение, которое впоследствии расширяется благодаря использованию техники разрежения матриц, разработанной в исследовании [17]. Общее решение задачи представляется в виде семейства подмножеств решений, которое также может быть записано в компактной векторной форме в параметрическом виде.

Некоторые семейства решений могут содержаться в других семействах и поэтому при записи общего решения могут быть отброшены. Был разработан критерий отбрасывания подобных несущественных семейств, а также описаны процедуры, которые позволяют сократить число подмножеств, которые необходимо учесть при построении общего решения.

8. Литература

[1] Baccelli F., G. Cohen, G. J. Olsder, J.-P. Quadrat. Synchronization and Linearity. Chichester : Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley, 1993. 514 p.

[2] Маслов В. П., В. Н. Колокольцов. Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. М.: Физматлит, 1994. 144 с.

[3] Cuninghame-Green R. A. Minimax algebra and applications - Advances in Imaging and Electron Physics. Vol. 90 / ed. by P. W. Hawkes. San Diego: Academic Press, 1994. P. 1–121.

[4] Golan J. S. Semirings and Affine Equations over Them. Mathematics and Its Applications. Vol. 556 of Springer, 2003. 241 p.

[5] Heidergott B, G. J. Olsder, J. van der Woude. Max Plus at Work. Princeton Series in Applied Mathematics: Princeton Univ. Press, 2006. 226 p.

[6] Gondran M., M. Minoux. Graphs, Dioids and Semirings. Computer Science. of Operations Research Vol. 41, Springer, 2008. 383 p.

[7] Кривулин Н. К. Методы идемпотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009. 256 с.

[8] Glazek K. A Guide to the Literature on Semirings and Their Applications in Mathematics and Information Sciences. Springer, 2002. 392 p.

[9] Воробьев Н. Н. Экстремальная алгебра положительных матриц . Elektron. Informationsverarb. Kybernet. 1967. Bd. 3, N 1. S. 39-72.

[10] Cuninghame-Green R. A. Projections in minimax algebra. Math. Program. Vol. 10. 1976. P. 111–123.

[11] Zimmermann K. Some optimization problems with extremal operations. Mathematical Programming at Oberwolfach II. Vol. 22 of Mathematical Programming Studies / ed. by B. Korte, K. Ritter. Berlin: Springer, 1984. P. 237–251.

[12] Butkovič P., K. P. Tam. On some properties of the image set of a max-linear mapping . Tropical and Idempotent Mathematics. Vol. 495 of Contemporary Mathematics. Ed. by G. L. Litvinov, S. N. Sergeev. Providence: AMS, 2009. P. 115-126.

[13] Кривулин Н. К. О решении линейных векторных уравнения в идемпотентной алгебре. Математические модели. Теория и приложения. Вып. 5: Сб. науч. статей под ред. М. К. Чиркова. СПб.: ВВМ, 2004. С. 105–113.

[14] Krivulin N. A new algebraic solution to multidimensional minimax location problems with Chebyshev distance . WSEAS Trans. Math. Vol. 11, N 7. 2012. P. 605–614.

[15] Krivulin N. Solution of linear equations and inequalities in idempotent vector spaces. Int. J. Appl. Math. Inform. Vol. 7, N 1. 2013. P. 14–23.

[16] Krivulin N., K. Zimmermann. Direct solutions to tropical optimization problems with nonlinear objective functions and boundary constraints. Mathematical Methods and Optimization Techniques in Engineering. Ed. by D. Biolek, and H. Walter, I. Utu, C. von Lucken. WSEAS Press, 2013. P. 86–91.

[17] Krivulin N. Algebraic solution of tropical optimization problems via matrix sparsification with application to scheduling. J. Log. Algebr. Methods Program. 2017. Vol. 89. P. 150–170.

[18] Krivulin N. Extremal properties of tropical eigenvalues and solutions to tropical optimization problems. Linear Algebra Appl. Vol. 468. 2015. P. 211-232.