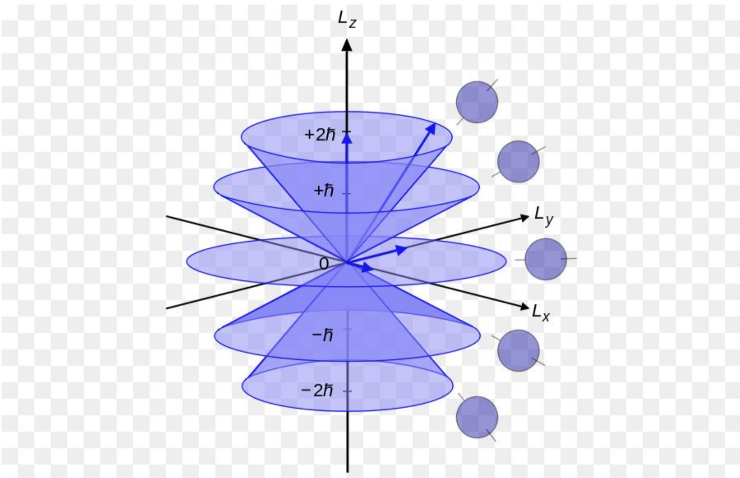
Национальный исследовательский центр
«Курчатовский институт»
Петербургский институт ядерной физики
им.Б.П.Константинова

И. А. Митропольский

АППАРАТ УГЛОВОГО МОМЕНТА
В ТЕОРИИ АТОМНОГО ЯДРА

Учебное пособие для аспирантов



Гатчина
2019

УДК 539.1.01
ББК 22.314

Митропольский Иван Андреевич - доктор физико-математических наук.

Печатается по решению Учёного совета Института
(протокол от 28.11.2019 №8).

Митропольский И.А. Аппарат углового момента в теории атомного ядра. – Гатчина Ленинградской обл.: Изд-во НИЦ «Курчатовский институт» - ПИЯФ, 2019 – 48 с.

Учебное пособие «Аппарат углового момента в теории атомного ядра» рассчитано на аспирантов, осваивающих образовательную программу высшего образования по направлению 03.06.01 «Физика и астрономия» направленности 01.04.16 «Физика атомного ядра и элементарных частиц» в аспирантуре НИЦ «Курчатовский институт» – ПИЯФ. Оно также может быть полезно аспирантам, обучающимся по иным направленностям подготовки по данному направлению.

Содержание пособия углубляет и расширяет знания, полученные аспирантами на предыдущих уровнях обучения, в части применения современного аппарата углового момента в ядерной физике, в особенности в теории ядра и ядерных реакций.

Учебное пособие отражает материал лекций по курсу «Дополнительные главы квантовой механики в теории атомного ядра», читаемых автором на Физическом факультете СПбГУ. Оно представляет собой сводку основных формул с краткими комментариями, практические рекомендации по их использованию, иллюстративный материал в форме таблиц и рисунков, содержит задачи и упражнения, позволяющие закрепить содержание отдельных теоретических положений по изучаемым темам.

В принципе, этого пособия должно быть достаточно для практической работы молодого специалиста в избранной области. Дополнительный материал содержится в рекомендованной литературе.

СОДЕРЖАНИЕ

Памяти профессора СПбГУ
Олега Михайловича КНЯЗЬКОВА,
приобщившего автора к красоте
аналитических вычислений

ВВЕДЕНИЕ

Пособие ориентировано на аспирантов и студентов магистратуры, специализирующихся в области ядерной физики и прошедших подготовку по квантовой механике в университетском объёме. В нём подробно рассматриваются вопросы, связанные с угловым моментом сложных квантово-механических систем, в первую очередь атомных ядер.

Круг вопросов, рассматриваемых в пособии, наиболее полно мог бы быть отнесен к теоретико-групповым методам. Симметрийный подход к проблеме вращения наиболее общий, он не только приводит к необходимым результатам, но и раскрывает глубокую взаимосвязь, на первый взгляд, независимых понятий и величин. Однако в теории ядра сложилась другая традиция, в ней используется индуктивный метод исследования по принципу «от частного к общему». Это находит отражение даже в терминологии. Данное пособие написано «ядерщиком» и ориентировано на «ядерщиков», поэтому выбор стиля изложения был предопределен однозначно.

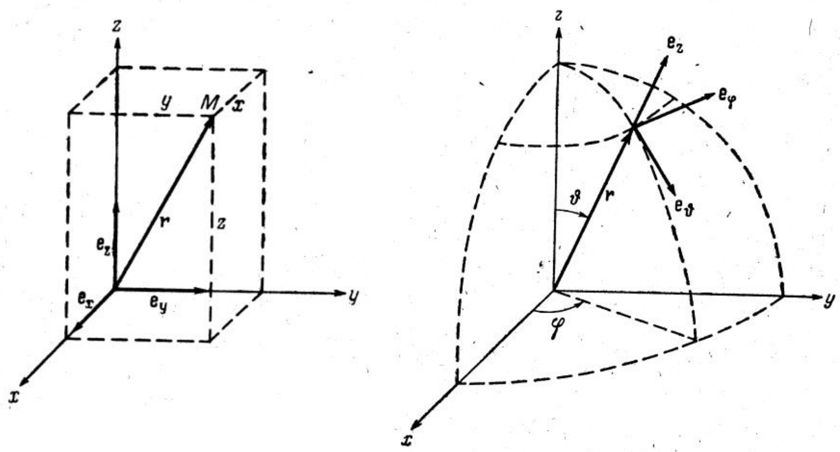
Пособие не может рассматриваться как независимый учебник, скорее это конспект, содержащий основные формулы и краткие комментарии к ним. Теоретический материал иллюстрируется рисунками и таблицами, дополняется задачами и упражнениями. В конце приводится список рекомендованной литературы.

СИСТЕМЫ КООРДИНАТ. КОМПОНЕНТЫ ВЕКТОРОВ

В декартовой системе координат положение материальной точки M в пространстве определяется расстояниями x, y, z от неё до координатных плоскостей, рис.1а. Радиус-вектор точки M

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \qquad (1)$$

задаётся декартовыми ортами $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$, которые образуют ортонормированный базис.



«а» «б»

Рис.1. Положение материальной точки M в декартовой «а» и сферической «б» системах координат[1]

В сферической системе координат, рис.1б, положение точки M определяется длиной радиуса-вектора r, полярным углом ϑ и азимутальным углом φ. Декартовы и сферические координаты связаны соотношениями:

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad 0 \le r < \infty,$$

$$y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad \vartheta = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad 0 \le \vartheta \le \pi, \qquad (2)$$

[1] Для определённости далее рассматриваются только правые системы координат.

$$z = r\cos\vartheta, \quad \varphi = \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \left(\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{y}{x}\right), \qquad 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Сферические орты $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\varphi$, рис.1б, образуют ортонормированный базис, но в отличие от декартовых ортов зависят от углов:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial r}\mathbf{e}_r = 0, && \frac{\partial}{\partial r}\mathbf{e}_\vartheta = 0, && \frac{\partial}{\partial r}\mathbf{e}_\varphi = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial \vartheta}\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\vartheta, && \frac{\partial}{\partial \vartheta}\mathbf{e}_\vartheta = -\mathbf{e}_r, && \frac{\partial}{\partial \vartheta}\mathbf{e}_\varphi = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial \varphi}\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\varphi\sin\vartheta, && \frac{\partial}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\vartheta = \mathbf{e}_\varphi\cos\vartheta, && \frac{\partial}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{e}_r\sin\vartheta - \mathbf{e}_\vartheta\cos\vartheta.
\end{aligned} \tag{3}$$

Эти соотношения должны учитываться при дифференцировании векторов.

В теории угловых моментов широко используются циклические координаты x_μ, $\mu = \pm 1, 0$, которые определяются соотношениями[2]

$$\begin{aligned}
&x_{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x+iy) = -\frac{1}{\sqrt{2}}r\cdot\sin\vartheta\cdot e^{i\varphi},\\
&x_0 = z = r\cos\vartheta,\\
&x_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-iy) = \frac{1}{\sqrt{2}}r\cdot\sin\vartheta\cdot e^{-i\varphi}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Циклические орты $\mathbf{e}_{-1}, \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_{+1}$ образуют комплексный ортонормированный базис.

Любой вектор может быть разложен по базисным ортам, т.е. представлен в виде

$$\mathbf{A} = \sum_\alpha A_\alpha \mathbf{e}_\alpha\ . \tag{5}$$

В декартовых координатах

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{e}_x + A_y\mathbf{e}_y + A_z\mathbf{e}_z\,, \tag{5.1}$$

в сферических –

$$\mathbf{A} = A_r\mathbf{e}_r + A_\vartheta\mathbf{e}_\vartheta + A_\varphi\mathbf{e}_\varphi. \tag{5.2}$$

В циклических координатах

$$\mathbf{A} = \sum_{\mu=\pm1,0}(-1)^\mu A_{-\mu}\mathbf{e}_\mu\ . \tag{5.3}$$

[2] Для простоты рассматриваются только ковариантные циклические координаты.

Связь между ортами в различных системах координат:
декартовы и сферические орты

$$\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_r \sin\vartheta\cos\varphi + \mathbf{e}_\vartheta \cos\vartheta\cos\varphi - \mathbf{e}_\varphi \sin\varphi,$$
$$\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_r \sin\vartheta\sin\varphi + \mathbf{e}_\vartheta \cos\vartheta\sin\varphi + \mathbf{e}_\varphi \cos\varphi, \quad (6.1)$$
$$\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_r \cos\vartheta - \mathbf{e}_\vartheta \sin\vartheta;$$

декартовы и циклические орты

$$\mathbf{e}_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{e}_{-1} - \mathbf{e}_{+1}\right),$$
$$\mathbf{e}_y = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{e}_{-1} + \mathbf{e}_{+1}\right), \quad (6.2)$$
$$\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_0;$$

сферические и декартовы орты

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_x \sin\vartheta\cos\varphi + \mathbf{e}_y \sin\vartheta\sin\varphi + \mathbf{e}_z \cos\varphi,$$
$$\mathbf{e}_\vartheta = \mathbf{e}_x \cos\vartheta\cos\varphi + \mathbf{e}_y \cos\vartheta\sin\varphi - \mathbf{e}_z \sin\varphi, \quad (6.3)$$
$$\mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{e}_x \sin\varphi + \mathbf{e}_y \cos\varphi;$$

сферические и циклические орты

$$\mathbf{e}_r = -\mathbf{e}_{+1}\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\vartheta e^{-i\varphi} + \mathbf{e}_0 \cos\vartheta + \mathbf{e}_{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\vartheta e^{i\varphi},$$
$$\mathbf{e}_\vartheta = -\mathbf{e}_{+1}\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\vartheta e^{-i\varphi} - \mathbf{e}_0 \sin\vartheta + \mathbf{e}_{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\vartheta e^{i\varphi}, \quad (6.4)$$
$$\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_{+1}\frac{i}{\sqrt{2}}e^{-i\varphi} + \mathbf{e}_{-1}\frac{i}{\sqrt{2}}e^{i\varphi};$$

циклические и декартовы орты

$$\mathbf{e}_{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y\right),$$
$$\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_z, \quad (6.5)$$
$$\mathbf{e}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y\right);$$

циклические и сферические орты

$$\mathbf{e}_{+1} = -\mathbf{e}_r\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\vartheta e^{i\varphi} - \mathbf{e}_\vartheta\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\vartheta e^{i\varphi} - \mathbf{e}_\varphi\frac{i}{\sqrt{2}}e^{i\varphi},$$
$$\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_r \cos\vartheta - \mathbf{e}_\vartheta \sin\vartheta, \quad (6.6)$$

$$\mathbf{e}_{-1} = \mathbf{e}_r \frac{i}{\sqrt{2}} \sin\vartheta e^{-i\varphi} + \mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\vartheta e^{-i\varphi} - \mathbf{e}_\varphi \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi}.$$

Связь между компонентами векторов в различных системах координат такая же, как связь между соответствующими ортами с заменой $\mathbf{e}_\alpha \to \mathbf{A}_\alpha$.

Скалярное произведение векторов коммутативно и не меняется при повороте системы координат,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \tag{7.1}$$

в декартовых координатах;

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_r B_r + A_\vartheta B_\vartheta + A_\varphi B_\varphi \tag{7.2}$$

в сферических координатах, если вектора не являются дифференциальными операторами;

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = -A_{+1} B_{-1} + A_0 B_0 - A_{-1} B_{+1} \tag{7.3}$$

в циклических координатах.

Векторным произведением в декартовых координатах

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \sum_{i=x,y,z} [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_i \mathbf{e}_i \tag{8}$$

называется вектор, компоненты которого определяются как

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_x &= A_y B_z - A_z B_y, \\ [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_y &= A_z B_x - A_x B_z, \\ [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_z &= A_x B_y - A_y B_x. \end{aligned} \tag{8.1}$$

В сферических координатах, если вектора не являются дифференциальными операторами,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\vartheta & \mathbf{e}_\varphi \\ A_r & A_\vartheta & A_\varphi \\ B_r & B_\vartheta & B_\varphi \end{vmatrix} = \sum_{\alpha=r,\vartheta,\varphi} [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_\alpha \mathbf{e}_\alpha , \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_r &= A_\vartheta B_\varphi - A_\varphi B_\vartheta, \\ [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_\vartheta &= A_\varphi B_r - A_r B_\varphi, \\ [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_\varphi &= A_r B_\vartheta - A_\vartheta B_r. \end{aligned} \tag{9.1}$$

В циклических координатах:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = i\begin{vmatrix}\mathbf{e}_{+1} & \mathbf{e}_0 & \mathbf{e}_{-1}\\ A_{+1} & A_0 & A_{-1}\\ B_{+1} & B_0 & B_{-1}\end{vmatrix} = \sum_{\mu=\pm1,0}\left[\mathbf{A}\times\mathbf{B}\right]_\mu (-1)^\mu \mathbf{e}_{-\mu}\,, \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned}&\left[\mathbf{A}\times\mathbf{B}\right]_{+1} = i\left(A_0B_{+1} - A_{+1}B_0\right),\\ &\left[\mathbf{A}\times\mathbf{B}\right]_0 = i\left(A_{-1}B_{+1} - A_{+1}B_{-1}\right),\\ &\left[\mathbf{A}\times\mathbf{B}\right]_{-1} = i\left(A_{-1}B_0 - A_0B_{-1}\right).\end{aligned} \tag{10.1}$$

Векторное произведение антикоммутативно (если не содержит операторов дифференцирования).

Для произведений трёх и более векторов справедливы следующие равенства:

$$\mathbf{A}\cdot\left[\mathbf{B}\times\mathbf{C}\right] = \mathbf{B}\cdot\left[\mathbf{C}\times\mathbf{A}\right] = \mathbf{C}\cdot\left[\mathbf{A}\times\mathbf{B}\right], \tag{11}$$

$$\mathbf{A}\times\left[\mathbf{B}\times\mathbf{C}\right] = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}), \tag{12}$$

$$\left[\mathbf{A}\times\mathbf{B}\right]\cdot\left[\mathbf{C}\times\mathbf{D}\right] = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}) - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{D})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}), \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\left[\mathbf{A}\times\mathbf{B}\right]\times\left[\mathbf{C}\times\mathbf{D}\right] &= \mathbf{B}\left(\mathbf{A}\cdot\left[\mathbf{C}\times\mathbf{D}\right]\right) - \mathbf{A}\left(\mathbf{B}\cdot\left[\mathbf{C}\times\mathbf{D}\right]\right) =\\ &= \mathbf{C}\left(\mathbf{A}\cdot\left[\mathbf{B}\times\mathbf{D}\right]\right) - \mathbf{D}\left(\mathbf{A}\cdot\left[\mathbf{B}\times\mathbf{C}\right]\right).\end{aligned} \tag{14}$$

Оператор Гамильтона ∇ (градиент) является векторным дифференциальным оператором, его компоненты в декартовых координатах:

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}\,,\quad \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}\,,\quad \nabla_z = \frac{\partial}{\partial z}\,. \tag{15}$$

В сферических координатах

$$\nabla = \mathbf{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\vartheta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \mathbf{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\,. \tag{16}$$

Здесь существенен порядок сомножителей, т.к. орты зависят от углов, см. равенства (3). В циклических координатах:

$$\nabla = \sum_{\mu=\pm1,0}(-1)^\mu \mathbf{e}_\mu \nabla_{-\mu} = -\mathbf{e}_{+1}\nabla_{-1} + \mathbf{e}_0\nabla_0 - \mathbf{e}_{-1}\nabla_{+1}\,, \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned}&\nabla_{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),\\ &\nabla_0 = \frac{\partial}{\partial z}\,,\end{aligned} \tag{17.1}$$

$$\nabla_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Оператор Лапласа $\Delta = \nabla^2$ является скалярным дифференциальным оператором. В декартовых координатах он имеет вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \qquad (18)$$

в сферических –

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left\{r^2\frac{\partial}{\partial r}\right\} + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left\{\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right\} + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \qquad (19)$$

Угловая часть оператора Лапласа, $\Delta = \frac{1}{r^2}\left(\Delta_r + \Delta_\Omega\right)$,

$$\Delta_\Omega = \frac{1}{\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left\{\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right\} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}, \qquad (19.1)$$

связана с оператором квадрата орбитального момента

$$\Delta_\Omega = -\hat{L}^2. \qquad (19.2)$$

Задачи и упражнения:

1. Используя соотношения между ортами, получить связь между компонентами произвольного вектора в декартовых, сферических и циклических координатах.
2. Используя определение скалярного произведения векторов в декартовых координатах $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$, получить выражения для скалярного произведения в сферических и циклических координатах.
3. Почему выражение $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_r B_r + A_\vartheta B_\vartheta + A_\varphi B_\varphi$ не может быть скалярным произведением в сферических координатах, если один из векторов содержит дифференцирование?
4. Получить выражение для оператора Лапласа в циклических координатах.
5. Доказать соотношение $e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + \left[\hat{A},\hat{B}\right] + \frac{1}{2!}\left[\hat{A},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right] + \ldots$

УГЛОВЫЕ МОМЕНТЫ

Оператором полного углового момента $\hat{\mathbf{J}}$ системы называется псевдовекторный[3] оператор, осуществляющий преобразование волновых функций и операторов при повороте системы координат на бесконечно малый угол $\delta\omega$:

$$\begin{aligned} &\Psi \to \Psi' = \left(1 - i\delta\omega \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{J}}\right)\Psi, \\ &\hat{O} \to \hat{O}' = \hat{O} - i\delta\omega \mathbf{n} \cdot \left[\hat{\mathbf{J}}, \hat{O}\right]. \end{aligned} \tag{20}$$

Вопросы, связанные с поворотом системы координат, вынесены в приложение. Он является эрмитовским оператором, т.е. $\hat{\mathbf{J}}^{+} = \hat{\mathbf{J}}$. Для декартовых и циклических компонент условие эрмитовости означает:

$$\begin{aligned} &\left(\hat{J}_i\right)^{+} = \hat{J}_i, \quad i = x, y, z; \\ &\left(\hat{J}_\mu\right)^{+} = (-1)^\mu \hat{J}_{-\mu}, \quad \mu = \pm 1,\ 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Определением оператора полного углового момента $\hat{\mathbf{J}}$ может служить коммутационное соотношение

$$\left[\left(\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{J}}\right), \left(\mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{J}}\right)\right] = i\hbar\left[\mathbf{a} \times \mathbf{b}\right] \cdot \hat{\mathbf{J}}, \tag{22}$$

где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ − произвольные постоянные вектора. Выбирая в качестве этих векторов координатные орты, можно получить коммутационные соотношения в соответствующих системах координат. В декартовых координатах проекции оператора полного углового момента удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} &\left[\hat{J}_x, \hat{J}_x\right] = \left[\hat{J}_y, \hat{J}_y\right] = \left[\hat{J}_z, \hat{J}_z\right] = 0; \\ &\left[\hat{J}_x, \hat{J}_y\right] = i\hbar \hat{J}_z; \quad \left[\hat{J}_y, \hat{J}_z\right] = i\hbar \hat{J}_x; \quad \left[\hat{J}_z, \hat{J}_x\right] = i\hbar \hat{J}_y; \end{aligned} \tag{22.1}$$

Циклические компоненты –

$$\begin{aligned} &\left[\hat{J}_{+1}, \hat{J}_{+1}\right] = \left[\hat{J}_0, \hat{J}_0\right] = \left[\hat{J}_{-1}, \hat{J}_{-1}\right] = 0; \\ &\left[\hat{J}_{+1}, \hat{J}_0\right] = -\hbar \hat{J}_{+1}; \quad \left[\hat{J}_{+1}, \hat{J}_{-1}\right] = -\hbar \hat{J}_0; \quad \left[\hat{J}_0, \hat{J}_{-1}\right] = -\hbar \hat{J}_{-1} \end{aligned} \tag{22.2}$$

Компоненты операторов орбитального углового момента $\hat{\mathbf{L}}$ и спина $\hat{\mathbf{S}}$ подчиняются аналогичным коммутационным соотношениям[4].

---

[3] Псевдовектор или аксиальный вектор не меняет знака при инверсии координат $\mathbf{r} \to -\mathbf{r}$.

[4] Далее используем систему единиц, где $\hbar = 1$.

Оператор квадрата полного момента $\hat{J}^2$ в декартовых координатах

$$\hat{J}^2 = \sum_i \hat{J}_i^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2 , \tag{23.1}$$

в циклических –

$$\hat{J}^2 = \sum_\mu (-1)^\mu \hat{J}_{-\mu} \hat{J}_\mu = -\hat{J}_{+1}\hat{J}_{-1} + \hat{J}_0\hat{J}_0 - \hat{J}_{-1}\hat{J}_{+1} . \tag{23.2}$$

Так как $[\hat{J}^2, \hat{J}_z] = 0$, эти операторы имеют общий набор собственных функций $\Phi_{JM} \equiv | JM \rangle$:

$$\begin{aligned} \hat{J}^2 \Phi_{JM} &= J(J+1)\Phi_{JM} , \\ \hat{J}_z \Phi_{JM} &= M\Phi_{JM} \end{aligned} \tag{24}$$

с квантовыми числами *J*, *M*, имеющими смысл полного углового момента, $J = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$ и его *z*-проекции, $-J \le M \le J$. Отличные от нуля матричные элементы остальных проекций

$$\langle JM \pm 1 | \hat{J}_x \pm \hat{J}_y | JM \mp 1 \rangle = [(J \mp M)(J \pm M + 1)]^{1/2} \tag{25}$$

содержат фазовые множители, связанные с выбором относительных фаз для состояний с разными *M*. Чаще всего полагают, что матричные элементы оператора $\hat{J}_x$ вещественны, а матричные элементы $\hat{J}_y$ – чисто мнимые.

Оператор орбитального момента в координатном представлении –

$$\hat{\mathbf{L}} = -i\hbar\, \mathbf{r} \times \nabla \ . \tag{26}$$

Его декартовы компоненты[5]:

$$\begin{aligned} \hat{L}_x &= -i(y\nabla_z - z\nabla_y) = -i\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y} \right), \\ \hat{L}_y &= -i(z\nabla_x - x\nabla_z) = -i\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z} \right), \\ \hat{L}_z &= -i(x\nabla_y - y\nabla_x) = -i\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \right); \end{aligned} \tag{27}$$

[5] В определении (26) явно использована константа Планка, далее положено $\hbar = 1$.

сферические:

$$\hat{L}_r = 0, \quad \hat{L}_\vartheta = \frac{i}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \quad \hat{L}_\varphi = -i\frac{\partial}{\partial\vartheta}, \tag{28}$$

и циклические компоненты:

$$\begin{aligned} \hat{L}_{+1} &= x_0\nabla_{+1} - x_{+1}\nabla_0, \\ \hat{L}_0 &= x_{-1}\nabla_{+1} - x_{+1}\nabla_{-1}, \\ \hat{L}_{-1} &= x_{-1}\nabla_0 - x_0\nabla_{-1}. \end{aligned} \tag{29}$$

Оператор спина $\hat{\mathbf{S}}$ представляется тремя (по числу компонент) квадратными матрицами размерности $(2S+1)\times(2S+1)$, где S спин частицы. Они действуют на спиновые функции и удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям, что и компоненты полного углового момента (22). Для спина $S = 1/2$ операторы декартовых проекций принято выражать через матрицы Паули:

$$\begin{aligned} \hat{S}_x &= \tfrac{1}{2}\hat{\sigma}_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{S}_y &= \tfrac{1}{2}\hat{\sigma}_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{S}_z &= \tfrac{1}{2}\hat{\sigma}_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{30}$$

Соответствующие собственные функции – спиноры $\chi_{1/2,\mu}$:

$$\begin{aligned} \hat{S}^2\chi_{1/2,\mu} &= \frac{3}{4}\chi_{1/2,\mu} \\ \hat{S}_z\chi_{1/2,\mu} &= \mu\chi_{1/2,\mu} \end{aligned} \tag{31}$$

Каноническое представление для спиноров:

$$\chi_{1/2,1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \chi_{1/2,-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

В ядерной физике для описания явлений с поляризацией используются поляризационные операторы $\hat{T}_{LM}(S)$, L, M – целые числа, L=0, 1, …2S, $M \le |L|$. Они действуют только на спиновые переменные и определяются выражением

$$\hat{T}_{LM}(S) = N_L(S)\left(\hat{\mathbf{S}}\cdot\nabla\right)^L \left\{r^L Y_{LM}(\vartheta,\varphi)\right\}, \tag{33}$$

где $\hat{\mathbf{S}}$ – оператор спина, $N_L(S)$ – нормировочный множитель,

$$N_L(S) = \frac{2^L}{L!}\left[\frac{4\pi(2S-L)!}{(2S+L+1)!}\right]^{1/2}, \tag{33.1}$$

а $Y_{LM}(\vartheta,\varphi)$– сферические функции. Явный вид матриц $\hat{T}_{LM}(S)$ зависит от выбора представления для спиновых функций. В частности, в циклическом базисе для L=1

$$\hat{T}_{1M}(S) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{S(S+1)(2S+1)}}\hat{S}_M, \quad M = \pm 1,\ 0. \tag{34}$$

Поляризационные операторы образуют полную систему линейно независимых матриц. Произвольная квадратная матрица $\hat{A}$ размерности $(2S+1)\times(2S+1)$, S – целое или полуцелое число, может быть разложена по поляризационным операторам:

$$\hat{A} = \sum_{L=0}^{2S}\sum_{M=-L}^{L} A_{LM}\hat{T}_{LM}(S), \tag{35}$$

с коэффициентами

$$A_{LM} = \mathrm{Sp}\left\{\hat{T}^{+}_{LM}(S)\hat{A}\right\}. \tag{35.1}$$

Задачи и упражнения:

1. Показать, что $\left[\hat{J}^2, \hat{J}_i\right] = 0,\ i = x, y, z$. Почему нельзя построить набор собственных функций общий для всех этих операторов?
2. Почему радиальная компонента орбитального момента $\hat{L}_r = 0$?
3. Показать, что $\hat{S}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2 = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{pmatrix}$.
4. Построить циклические компоненты оператора спина $\hat{\mathbf{S}}$.
5. Как выглядит оператор орбитального момента $\hat{\mathbf{L}}$ в импульсном представлении?
6. Показать, что операторы компонент радиуса-вектора **r** и импульса **p** антикоммутируют с оператором отражения координат P, а операторы компонент углового момента **L** коммутируют с P.
7. Показать, что угловая часть оператора Лапласа $\Delta = \hat{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ в сферических координатах совпадает с точностью до знака с оператором квадрата орбитального момента $\hat{L}^2$.

СФЕРИЧЕСКИЕ И СПИНОВЫЕ ФУНКЦИИ

Сферические функции $Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$ являются собственными функциями оператора квадрата орбитального углового момента и его проекции:

$$\begin{aligned} &\hat{L}^2 Y_{lm}(\vartheta,\varphi) = l(l+1)Y_{lm}(\vartheta,\varphi), \\ &L_z Y_{lm}(\vartheta,\varphi) = mY_{lm}(\vartheta,\varphi). \end{aligned} \qquad (36)$$

Это однозначные непрерывные комплексные функции двух вещественных переменных $0 \le \vartheta \le \pi$ и $0 \le \varphi \le 2\pi$, характеризующиеся двумя параметрами l и m, $l = 0,1,2,\ldots$ и $m = -l,-l+1,\ldots l-1,l$ ($|m| \le l$). При заданном l имеется $(2l+1)$ независимых функций с разными значениями m. Они характеризуют угловое распределение частиц, обладающих орбитальным моментом, квадрат которого равен $l(l+1)$.

Выражения (36) являются дифференциальными уравнениями второго порядка. В квантово-механических приложениях основной интерес представляют регулярные решения $|Y_{lm}(\vartheta,\varphi)|^2 < \infty$, которые определяются следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} &Y_{lm}(\vartheta,\varphi \pm 2\pi n) = Y_{lm}(\vartheta,\varphi), \\ &\frac{\partial}{\partial\varphi} Y_{lm}(\vartheta,\varphi)\bigg|_{\vartheta=0} = \frac{\partial}{\partial\varphi} Y_{lm}(\vartheta,\varphi)\bigg|_{\vartheta=\pi} = 0. \end{aligned} \qquad (37)$$

Условие нормировки и ортогональности функций $Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta Y_{lm}^*(\vartheta,\varphi) Y_{l'm'}(\vartheta,\varphi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'} . \qquad (38)$$

Выбор фаз по Кондону – Шортли фиксирует однозначный выбор сферических функций:

$$Y_{l0}(0,0) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} , \qquad (39.1)$$

$$Y_{lm}^*(\vartheta,\varphi) = Y_{lm}(\vartheta,-\varphi) = (-1)^m Y_{l-m}(\vartheta,\varphi). \qquad (39.2)$$

Из этих соотношений следует, что функции $Y_{l0}(\vartheta,\varphi)$ вещественны при любых значениях аргументов.

Сферические функции выражаются через присоединённые полиномы Лежандра $P_l^m(x)$:

$$Y_{lm}(\vartheta,\varphi)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\vartheta)e^{im\varphi}. \qquad (40)$$

Для малых значений индексов они имеют следующий вид:

$$Y_{00}(\vartheta,\varphi)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}},$$

$$Y_{10}(\vartheta,\varphi)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cos\vartheta, \qquad Y_{1\pm1}(\vartheta,\varphi)=\mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin\vartheta e^{\pm i\varphi},$$

$$Y_{20}(\vartheta,\varphi)=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\left(3\cos^2\vartheta-1\right)=\frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{\pi}}(1+3\cos 2\vartheta), \qquad (41)$$

$$Y_{2\pm1}(\vartheta,\varphi)=\mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3\cdot5}{2\pi}}\cos\vartheta\sin\vartheta\cdot e^{\pm i\varphi}=\mp\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3\cdot5}{2\pi}}\sin 2\vartheta\cdot e^{\pm i\varphi},$$

$$Y_{2\pm2}(\vartheta,\varphi)=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3\cdot5}{2\pi}}\sin^2\vartheta\cdot e^{\pm2i\varphi}=\frac{1}{8}\sqrt{\frac{3\cdot5}{2\pi}}(1-\cos 2\vartheta)\cdot e^{\pm2i\varphi} \text{ и т.д.}$$

При больших значениях параметра l сферические функции имеют следующую асимптотику:

$$Y_{lm}(\vartheta,\varphi)\propto\frac{\cos\left[(2l+1)\frac{\vartheta}{2}+(2m-1)\frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{\sin\vartheta}}\frac{e^{im\varphi}}{\pi}+O\left(\frac{1}{l}\right). \qquad (42)$$

Сферические функции образуют полную систему $\sum\limits_{lm}Y_{lm}^*(\omega)Y_m(\omega')=\delta(\omega-\omega')$, что позволяет произвольную функцию $f(\vartheta,\varphi)$, определённую в области изменения аргументов $0\le\vartheta\le\pi$, $0\le\varphi<2\pi$, представить в виде ряда

$$f(\vartheta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}a_{lm}Y_{lm}(\vartheta,\varphi), \qquad (43)$$

где

$$a_{lm}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\vartheta\sin\vartheta f(\vartheta,\varphi)Y_{lm}^*(\vartheta,\varphi). \qquad (43.1)$$

Это разложение можно рассматривать как интегральное преобразование функции f от непрерывных переменных ϑ, φ к дискретным l, m. Ряд (43) называется разложением по мультиполям, а коэффициенты a_{lm} – мультипольными моментами.

Спиновые функции $\chi(\sigma)$ описывают поляризационные состояния частиц с определённым спином. Спиновая переменная σ имеет смысл проекции спина на ось квантования (ось z, например) и принимает $2S+1$ значений: $\sigma = -S, -S+1, \ldots S-1, S$, где S – спин частицы[6] (целое или полуцелое неотрицательное число). Спиновые функции χ_{Sm} состояний с определённым значением спина S и его проекции m называют базисными:

$$\hat{\mathbf{S}}^2 \chi_{Sm} = S(S+1)\chi_{Sm}, \quad \hat{S}_z \chi_{Sm} = m\chi_{Sm}. \qquad (44)$$

Из этого определения следует, что зависимость базисных функций от спиновой переменной даётся формулой $\chi_{Sm}(\sigma) = \delta_{m\sigma}$. Если их записывать в виде столбцов, то

$$\chi_{SS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{SS-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ldots \ \chi_{S-S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (45)$$

Совокупность $2S+1$ базисных функций χ_{Sm} с $m = S, S-1, \ldots -S$ образует полную систему,

$$\langle Sm \,|\, Sm' \rangle = \chi_{Sm}^{+} \chi_{Sm'} = \delta_{mm'}, \qquad (46)$$

ортонормированных спиновых функций:

$$\sum_{m=-S}^{S} |Sm\rangle\langle Sm| = \sum_{m=-S}^{S} \chi_{Sm}\chi_{Sm}^{+} = \hat{\mathbf{I}}, \qquad (47)$$

где $\hat{\mathbf{I}}$ - единичная матрица размерности $(2S+1)\times(2S+1)$. Спиноры (32) являются частным случаем спиновых функций для спина $S = 1/2$.

Для декартовых компонент оператора спина $\hat{S}_i$, $i = x, y, z$, отличны от нуля только следующие матричные элементы:

$$\begin{aligned} &\chi_{Sm\pm1}^{+} \hat{S}_x \chi_{Sm} = \frac{1}{2}\sqrt{(S \mp m)(S \pm m + 1)}, \\ &\chi_{Sm\pm1}^{+} \hat{S}_y \chi_{Sm} = \mp \frac{i}{2}\sqrt{(S \mp m)(S \pm m + 1)}, \\ &\chi_{Sm}^{+} \hat{S}_z \chi_{Sm} = m. \end{aligned} \qquad (48)$$

[6] Под словом «частица» имеются в виду не только элементарные частицы, но и сложные системы, ведущие себя в рассматриваемых явлениях как единое целое.

Для циклических компонент $\hat{S}_\mu$, $\mu = \pm 1, 0$ –

$$\chi^+_{Sm+1}\hat{S}_{+1}\chi_{Sm} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(S-m)(S+m+1)}\,,$$
$$\chi^+_{Sm}\hat{S}_0\chi_{Sm} = m\,, \tag{49}$$
$$\chi^+_{Sm-1}\hat{S}_{-1}\chi_{Sm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(S+m)(S-m+1)}\,.$$

Задачи и упражнения:

1. Доказать соотношения:
   $Y_{lm}(\vartheta, \varphi + \pi) = (-1)^m Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$,
   $Y_{lm}(-\vartheta, \varphi) = (-1)^m Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$,
   $Y_{lm}(\vartheta, -\varphi) = (-1)^m Y_{l-m}(\vartheta, \varphi)$.
2. Доказать, что $\sum_{m=-l}^{l} |Y_{lm}(\vartheta, \varphi)|^2 = \frac{2l+1}{4\pi}$.
3. Почему циклические компоненты операторов углового момента $\hat{L}_{\pm 1}$ называют «повышающими» или «понижающими»?
4. Представить выражение $(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_2)^2$ в виде, содержащим матрицы Паули (30) в степени не выше первой[7].
5. Состояние частицы со спином ½ характеризуется определёнными значениями квантовых чисел *l*, *m*, s_z. Найти вероятности различных значений полного момента *j*.
6. Показать, что произвольную квадратную матрицу 2-го ранга $\hat{A}$ можно представить в виде $\hat{A} = a_0\hat{I} + a_x\hat{\sigma}_x + a_y\hat{\sigma}_y + a_z\hat{\sigma}_z \equiv a_0 + \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}$, с коэффициентами $a_0 = \frac{1}{2} Sp\,\hat{A}$, $a = \frac{1}{2} Sp\left(\hat{\sigma}\hat{A}\right)$.
7. Показать, что из коммутационных соотношений $\left[\hat{L}_i, \hat{f}\right] = 0$ оператора физической величины *f* с компонентами углового момента следует, что матричные элементы $\langle n, L, M' | \hat{f} | n, L, M \rangle$ отличны от нуля только при *M=M’* и не зависят от *M*.

[7] Индексы 1, 2 у матриц означают, что они являются операторами, относящими к разным частицам.

СЛОЖЕНИЕ ДВУХ УГЛОВЫХ МОМЕНТОВ. КОЭФФИЦИЕНТЫ КЛЕБША – ГОРДАНА

Для системы, состоящей из двух невзаимодействующих подсистем, гамильтониан представим в виде $\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2$, а волновая функция - в виде произведения $\Psi(1,2) = \psi(1)\psi(2)$. Например, это могут быть два нуклона в среднем поле ядра со сферической симметрией. Для каждой подсистемы можно определить операторы углового момента $\hat{j}_1^2$ и $\hat{j}_{1z}$, $\hat{j}_2^2$ и $\hat{j}_{2z}$. Обозначим волновые функции подсистем как $|j_1 m_1\rangle$ и $|j_2 m_2\rangle$. В этом случае для всей системы возможны два представления.

В первом представлении при заданных значениях j_1, j_2 образуем все возможные произведения $\Psi(1,2) = |j_1 m_1\rangle \cdot |j_2 m_2\rangle$, перебирая все значения проекций m_1 и m_2. В таком случае число возможных состояний составной системы с гамильтонианом $\hat{H}$ будет равно $(2j_1+1)(2j_2+1)$. Эти состояния являются собственными для полного набора коммутирующих операторов: $\hat{H}, \hat{j}_1^2, \hat{j}_{1z}, \hat{j}_2^2, \hat{j}_{2z}$.

Для той же системы в другом представлении можно построить оператор полного углового момента:

$$\hat{J}_i = \hat{j}_{1i} + \hat{j}_{2i}, \qquad (i = x, y, z) \ . \tag{50}$$

Для него также выполняются коммутационные соотношения (22). Для коммутирующих операторов квадрата полного углового момента и его проекции можно построить собственные функции $\tilde{\Psi}(1,2) = |JMj_1 j_2\rangle$:

$$\begin{aligned} \hat{J}^2 |JMj_1 j_2\rangle &= J(J+1)|JMj_1 j_2\rangle \\ \hat{J}_z |JMj_1 j_2\rangle &= M|JMj_1 j_2\rangle. \end{aligned} \tag{51}$$

Число состояний $\tilde{\Psi}$ также равно $(2j_1+1)(2j_2+1)$ по числу комбинаций «одночастичных» проекций m_i. Эти функции являются собственными для операторов $\hat{j}_1^2$ и $\hat{j}_2^2$. Полный набор операторов во втором случае: $\hat{H}, \hat{j}_1^2, \hat{j}_2^2, \hat{J}^2, \hat{J}_z$. Отметим, что операторы $\hat{j}_{1z}$ и $\hat{j}_{2z}$ теперь уже не коммутируют с оператором квадрата полного момента $\hat{J}^2$:

$$[\hat{j}_{1z(2z)}, \hat{J}^2] \neq 0 \ . \tag{52}$$

Таким образом, эти два представления не совпадают друг с другом, но описывают одну и ту же систему. Следовательно, в соответствии с основными постулатами квантовой механики, они должны быть связаны унитарным преобразованием, $\tilde{\Psi} = \hat{U}\Psi$, или

$$\left| JMj_1 j_2 \right\rangle = \sum_{m_1 m_2} C(j_1 m_1, j_2 m_2 | JM) \left| j_1 m_1 \right\rangle \left| j_2 m_2 \right\rangle . \qquad (53)$$

Коэффициенты этого преобразования $C(j_1 m_1, j_2 m_2 \mid JM)$ называются коэффициентами Клебша – Гордана[8]. Они определяют амплитуду вероятности того, что угловые моменты j_1 и j_2 с проекциями m_1 и m_2 складываются в суммарный момент J с проекцией M (рис.2).

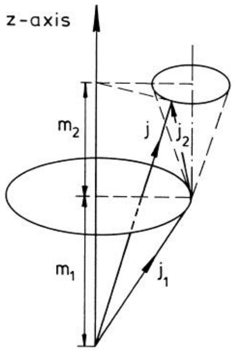


Рис.2. Графическое представление сложения угловых моментов в квазиклассическом пределе

Для значений моментов предполагается:

j_1, j_2, J – целые или полуцелые неотрицательные числа;

m_1, m_2, M – целые или полуцелые, положительные или отрицательные числа, $|m_1| \le j_1$, $|m_2| \le j_2$, $|M| \le J$;

$j_1 + m_1$, $j_2 + m_2$, $J + M$, $j_1 + j_2 + J$ – целые неотрицательные числа. В соответствии с правилами векторного сложения $\vec{j}_1 + \vec{j}_2 = \vec{J}$ отличны от нуля только те коэффициенты Клебша – Гордана, для которых выполняются следующие соотношения:

---

[8] Для коэффициентов Клебша – Гордана используется несколько обозначений: $C(j_1 m_1, j_2 m_2 \mid JM) = C^{JM}_{j_1 m_1, j_2 m_2} = \left(j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 jm \right) = C^{j1 j2}_{jm}\left(m_1 m_2 \right)$ и др.

$| j_1 - j_2 | \le J \le j_1 + j_2$ – правило треугольника,

$M = m_1 + m_2$ – правило отбора по проекциям моментов.

Фазы коэффициентов Клебша – Гордана в преобразовании (53) выбираются так, чтобы они были вещественными (выбор фаз по Кондону – Шортли). В этом случае прямое преобразование совпадает с обратным:

$$\left| j_1 m_1 \right\rangle \left| j_2 m_2 \right\rangle = \sum_{JM} C(j_1 m_1, j_2 m_2 \mid JM) \left| JM j_1 j_2 \right\rangle . \tag{54}$$

Ортонормированность коэффициентов Клебша – Гордана:

$$\sum_{m_1 m_2} C(j_1 m_1, j_2 m_2 \mid JM) \cdot C(j_1 m_1, j_2 m_2 \mid J'M') = \delta_{JJ'} \delta_{MM'}, \tag{55.1}$$

$$\sum_{JM} C(j_1 m_1, j_2 m_2 \mid JM) \cdot C(j_1 m_1', j_2 m_2' \mid JM) = \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'} . \tag{55.1}$$

Примеры использования коэффициентов Клебша – Гордана.

1. Рассмотрим волновую функцию фотона со спином s=1. Спиновая волновая функция $\chi_{s\nu}$ фотона имеет три компоненты χ_{1-1}, χ_{10} и χ_{11}. Полный момент $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$ (по правилу «треугольника» $j = l$ или $j = l \pm 1$), его проекция $\mu = m + \nu$. Соответствующая волновая функция

$$\begin{aligned} \psi_{j\mu ls} &= \sum_{\nu} C(l\ \mu - \nu, s\nu \mid j\mu) Y_{l,\mu-\nu} \chi_{s\nu} = \\ &= \sum_{\nu=0,\pm 1} C(l\ \mu - \nu, 1\nu \mid j\mu) Y_{l,\mu-\nu} \chi_{1\nu} . \end{aligned} \tag{56}$$

Эту волновую функцию часто называют векторной сферической функцией. Система этих функций ортонормирована и образует полный набор.

2. Волновая функция нуклона со спином s=1/2 и полным моментом $j = l \pm 1/2$

$$\begin{aligned} \psi_{j\mu ls} &= \sum_{\nu} C(l\ \mu - \nu, s\nu \mid j\mu) Y_{l,\mu-\nu} \chi_{s\nu} = \\ &= \sum_{\nu=\pm 1/2} C\left(l\ \mu - \nu, \frac{1}{2}\nu \mid j\mu \right) Y_{l,\mu-\nu} \chi_{\frac{1}{2}\nu} . \end{aligned} \tag{57}$$

Эту функцию называют «сферический спинор». Система этих функций также ортонормирована и образует полный набор.

Для изучения симметрии коэффициентов Клебша – Гордана введём новый символ:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_3+m_3+2j_1} \frac{1}{\sqrt{2j_3+1}} C\left(j_1-m_1, j_2-m_2 \mid j_3m_3\right), \qquad (58.1)$$

и, наоборот,

$$C\left(j_1m_1, j_2m_2 \mid j_3m_3\right) = (-1)^{j_1-j_2+m_{31}} \sqrt{2j_3+1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & -m_3 \end{pmatrix}, \qquad (58.2)$$

который называется $3jm$-символом Вигнера[9]. Он представляет собой амплитуду вероятности того, что три угловых момента $j1$, $j2$, $j3$ с проекциями $m1$, $m2$, $m3$ складываются в полный угловой момент равный нулю. Для $3j$-символа справедливы следующие свойства симметрии:

а). нечётная перестановка столбцов приводит к появлению фазового множителя:

$$\begin{pmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ m_2 & m_1 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}; \qquad (59)$$

б). при циклической перестановке столбцов (т.е. любой чётной перестановке) $3j$-символ не меняется:

$$\begin{pmatrix} j_2 & j_3 & j_1 \\ m_2 & m_3 & m_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}; \qquad (60)$$

в). изменение знаков у всех проекций моментов приводит к появлению фазового множителя:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}. \qquad (61)$$

Используя эти соотношения, можно установить соответствующие свойства симметрии коэффициентов Клебша – Гордана.

Приведём формулы для вычисления коэффициентов Клебша – Гордана при частных значениях индексов. Очевидно, что

$$C\left(jm, 00 \mid jm\right) = 1. \qquad (62)$$

---

[9] Для $3jm$-символов Вигнера, или просто $3j$-символов, также используется несколько обозначений:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = X\left(j_1j_2j_3, m_1m_2m_3\right) = (-1)^{j_1-j_2+j_3} S_{j_1m_1j_2m_2j_3m_3} \quad \text{и др.}$$

Если все проекции $m_1 = m_2 = m_3 = 0$, то

$$C(a0, b0 \mid c0) = \begin{cases} 0, & \text{если } a+b+c = 2g+1 \\ \dfrac{(-1)^{g-c}\sqrt{2c+1}\, g!}{(g-a)!(g-b)!(g-c)!} \times \\ \times \left[\dfrac{(2g-2a)!(2g-2b)!(2g-2c)!}{(2g+1)!} \right]^{1/2}, \\ \text{если } a+b+c = 2g, \end{cases} \tag{63}$$

где g – целое число. В частности,

$$C(a0, b0 \mid a+b0) = \frac{(a+b)!}{a!b!} \left[\frac{(2a)!(2b)!}{(2a+2b)!} \right]^{1/2}, \tag{63.1}$$

$$C(a0, b0 \mid a-b0) = (-1)^b \frac{a!}{b!(a-b)!} \left[\frac{(2b)!(2a-2b+1)!}{(2a+1)} \right]^{1/2}. \tag{63.2}$$

Если $c = \gamma$, то

$$C(a\alpha, b\beta \mid cc) = \delta_{\alpha+\beta,c} (-1)^{a-\alpha} \times$$

$$\times \left[\frac{(2c+1)!(a+b-c)!(a+\alpha)!(b+\beta)!}{(a+b+c+1)!(a-b+c)!(-a+b+c)!(a-\alpha)!(b-\beta)!} \right]^{1/2}. \tag{64}$$

В частности,

$$C(aa, bb \mid cc) = \delta_{a+b,c}, \tag{64.1}$$

$$C(aa, b-b \mid cc) = \delta_{a-b,c} \left[\frac{2c+1}{2a+1} \right]^{1/2}. \tag{64.2}$$

В таблицах 1 и 2 приведены выражения для коэффициентов Клебша – Гордана, когда один из моментов равен ½ или 1. Этих формул достаточно, например, для изучения рассеяния нейтронов на протонах с учётом тензорных сил (триплетное состояние).

Существует несколько независимых представлений коэффициентов Клебша – Гордана в виде алгебраических сумм. Все они содержат Δ-символ:

$$\Delta(abc) = \left[\frac{(a+b-c)!(a-b+c)!(-a+b+c)!}{(a+b+c+1)!} \right]^{1/2}. \tag{65}$$

Δ-символ симметричен относительно перестановки моментов a, b, c. Если один из моментов равен 0, то

$$\Delta(ab0) = \frac{1}{\sqrt{2a+1}}\delta_{ab}\,. \tag{66}$$

Таблица 1. Коэффициенты Клебша – Гордана $C(jm, j'm' \mid JM)$ с $j' = 1/2$.

	$m' = 1/2$	$m' = -1/2$
$J = j + 1/2$	$\sqrt{\frac{j+M+1/2}{2j+1}}$	$\sqrt{\frac{j-M+1/2}{2j+1}}$
$J = j - 1/2$	$-\sqrt{\frac{j-M+1/2}{2j+1}}$	$\sqrt{\frac{j+M+1/2}{2j+1}}$

Таблица 2. Коэффициенты Клебша – Гордана $C(jm, j'm' \mid JM)$ с $j' = 1$.

	$m' = 1$	$m' = 0$	$m' = -1$
$J = j+1$	$\sqrt{\frac{(j+M)(j+M+1)}{(2j+1)(2j+2)}}$	$\sqrt{\frac{(j-M+1)(j+M+1)}{(2j+1)(j+1)}}$	$\sqrt{\frac{(j-M)(j-M+1)}{(2j+1)(2j+2)}}$
$J = j$	$-\sqrt{\frac{(j+M)(j-M+1)}{2j(j+1)}}$	$\frac{M}{\sqrt{j(j+1)}}$	$\sqrt{\frac{(j-M)(j+M+1)}{2j(j+1)}}$
$J = j-1$	$\sqrt{\frac{(j-M)(j-M+1)}{2j(2j+1)}}$	$-\sqrt{\frac{(j-M)(j+M)}{j(2j+1)}}$	$\sqrt{\frac{(j+M)(j+M+1)}{2j(2j+1)}}$

Наиболее часто используется следующее выражение для коэффициентов Клебша – Гордана:

$$\begin{gathered} C(a\alpha, b\beta \mid c\gamma) = \delta_{\gamma,\alpha+\beta} \cdot \Delta(abc) \times \\ \times \left[(a+\alpha)!(a-\alpha)!(b+\beta)!(b-\beta)!(c+\gamma)!(c-\gamma)!(2c+1)\right]^{1/2} \times \\ \times \sum_z \frac{(-1)^z}{z!(a+b-c-z)!(a-\alpha-z)!(b+\beta-z)!(c-b+\alpha+z)!(c-a-\beta+z)!} \end{gathered} \tag{67}$$

Коэффициенты Клебша – Гордана можно представить в виде квазибинома $(u \pm v)^{(k)}$:

$$\begin{gathered} C(a\alpha, b\beta \mid c\gamma) = \delta_{\gamma,\alpha+\beta}\,\frac{\Delta(abc)}{(a+b-c)!}\left[\frac{(c-\gamma)!(c+\gamma)!(2c+1)}{(a-\alpha)!(a+\alpha)!(b-\beta)!(b+\beta)!}\right]^{1/2} \times \\ \times\left[(a+\alpha)(b-\beta)-(a-\alpha)(b+\beta)\right]^{(a+b-c)}. \end{gathered} \tag{68}$$

Для вычисления квазибином нужно раскрыть по формуле бинома Ньютона

$$(u\pm v)^{(k)}=\sum_z(\pm 1)^z\binom{k}{z}u^{(k-z)}v^{(z)}, \tag{69}$$

а степени заменить квазистепенями

$$u^{(z)}=\frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma(u-z+1)}. \tag{70}$$

В случае целого положительного z

$$u^{(z)}=u(u-1)\cdots(u-z+1). \tag{71}$$

Если $c=a+b$, то

$$C(a\alpha,b\beta\,|\,a+b\ \ \alpha+\beta)=\left[\frac{(2a)!(2b)!(a+b+\alpha+\beta)!(a+b-\alpha-\beta)!}{(2a+2b)!(a+\alpha)!(a-\alpha)!(b+\beta)!(b-\beta)!}\right]^{1/2}, \tag{72}$$

в частности,

$$C(aa,b-b\,|\,a+b\ \ a-b)=\left[\frac{(2a)!(2b)!}{(2a+2b)!}\right]^{1/2}. \tag{72.1}$$

Если $c=a+b-1$, то

$$C(a\alpha,b\beta\,|\,a+b-1\ \ \alpha+\beta)=2(b\alpha-a\beta)\times$$

$$\times\left[\frac{(2a+2b-1)(2a-1)!(2b-1)!(a+b+\alpha+\beta-1)!(a+b-\alpha-\beta-1)!}{(2a+2b)!(a+\alpha)!(a-\alpha)!(b+\beta)!(b-\beta)!}\right]^{1/2}, \tag{73}$$

в частности,

$$C(aa,b-b\,|\,a+b-1\ \ a-b)=\left[\frac{(2a)!(2b)!(2a-2b-1)!}{(2a+2b)!}\right]^{1/2}. \tag{73.1}$$

Если $c=a-b$ ($a\geq b$), то

$$C(a\alpha,b\beta\,|\,a-b\ \ \alpha+\beta)=$$

$$=(-1)^{b+\beta}\left[\frac{(a+\alpha)!(a-\alpha)!(2b)!(2a-b2+1)!}{(2a+1)!(a-b+\alpha+\beta)!(a-b-\alpha-\beta)!(b+\beta)!(b-\beta)!}\right]^{1/2}, \tag{74}$$

в частности,

$$C(aa,b-b\,|\,a-b\ \ a-b)=\sqrt{\frac{2a-2b+1}{2a+1}}. \tag{74.1}$$

Часто встречающиеся суммы и суммы произведений коэффициентов Клебша – Гордана:

$$\sum_\alpha C(a\alpha,b0\,|\,a\alpha)=\delta_{b0}(2a+1), \tag{75.1}$$

$$\sum_{\alpha}(-1)^{a-\alpha}C(a\alpha,a-\alpha\,|\,c0)=\delta_{c0}\sqrt{(2a+1)}\,, \tag{75.2}$$

$$\sum_{\alpha\beta}C(a\alpha,b\beta\,|\,c\gamma)C(a\alpha,b\beta\,|\,c'\gamma')=\delta_{cc'}\delta_{\gamma\gamma'}\,, \tag{75.3}$$

$$\sum_{c\gamma}C(a\alpha,b\beta\,|\,c\gamma)C(a\alpha',b\beta'\,|\,c\gamma)=\delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\beta\beta'}\,, \tag{75.4}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha\beta}(-1)^{b+\beta}C(a\alpha,b\beta\,|\,c\gamma)C(c'-\gamma',a\alpha\,|\,b-\beta)=\\&=\delta_{cc'}\delta_{\gamma\gamma'}(-1)^{c+\gamma}\sqrt{\frac{2b+1}{2c+1}},\end{aligned} \tag{75.5}$$

$$\sum_{\alpha\beta}(-1)^{a+\alpha}C(b\beta,a\alpha\,|\,c\gamma)C(a-\alpha,c'\gamma'\,|\,b\beta)=\delta_{cc'}\delta_{\gamma\gamma'}\sqrt{\frac{2b+1}{2c+1}}\,, \tag{75.6}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha\beta}C(c\gamma,b\beta\,|\,a\alpha)C(c'-\gamma',a\alpha\,|\,b\beta)=\\&=\delta_{cc'}\delta_{\gamma\gamma'}(-1)^{b-a-\gamma}\frac{\sqrt{(2a+1)(2b+1)}}{(2c+1)}.\end{aligned} \tag{75.7}$$

В общем случае удобнее пользоваться более симметричными $3j$-символами. В настоящее время существует ряд стандартных компьютерных программ для вычисления коэффициентов Клебша – Гордана с любыми аргументами.

Задачи и упражнения:

1. Доказать, что оператор полного углового момента $\hat{J}$ имеет общие собственные функции с «одночастичными» операторами $\hat{j}_1$ и $\hat{j}_2$.
2. Почему операторы $\hat{j}_{1z}$ и $\hat{j}_{2z}$ не коммутируют с квадратом полного углового момента $\hat{J}^2$?
3. Моменты l_1 и l_2 двух подсистем складываются в результирующий момент L. Показать, что в состояниях с определённым значением L скалярные произведения $\hat{\mathbf{l}}_1\cdot\hat{\mathbf{l}}_2, \hat{\mathbf{l}}_1\cdot\hat{\mathbf{L}}, \hat{\mathbf{l}}_2\cdot\hat{\mathbf{L}}$ также имеют определённые значения.
4. Используя $3j$-символы, доказать, что коэффициенты прямого преобразования (53) совпадают с коэффициентами обратного (54).
5. Вычислить значение коэффициента $C\left(\frac{9}{2}\frac{5}{2},11\middle|\frac{11}{2}\frac{7}{2}\right)$.

ОБОБЩЁННЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ИЛИ *D*-ФУНКЦИИ ВИГНЕРА

При повороте системы координат (см. приложение), характеризуемом углами Эйлера α, β, γ (рис.3), угловая часть Ψ_{JM} волновых функций системы с определённым угловым моментом J и проекцией M преобразуются с помощью D-функций Вигнера:

$$\Psi_{JM'}(\vartheta',\varphi',\sigma') = \sum_{M=-J}^{J} D^J_{MM'}(\alpha,\beta,\gamma)\Psi_{JM}(\vartheta,\varphi,\sigma), \qquad (76)$$

где ϑ, φ и ϑ', φ' – сферические углы в исходной системе координат и в повёрнутой, соответственно, σ и σ' – спиновые координаты. Таким образом, D-функции $D^J_{MM'}(\alpha,\beta,\gamma)$ определяются как матричные элементы оператора поворота $\hat{D}(\alpha,\beta,\gamma)$ в JM-представлении:

$$\langle JM|\hat{D}(\alpha,\beta,\gamma)|J'M'\rangle = \delta_{JJ'} D^J_{MM'}(\alpha,\beta,\gamma). \qquad (77)$$

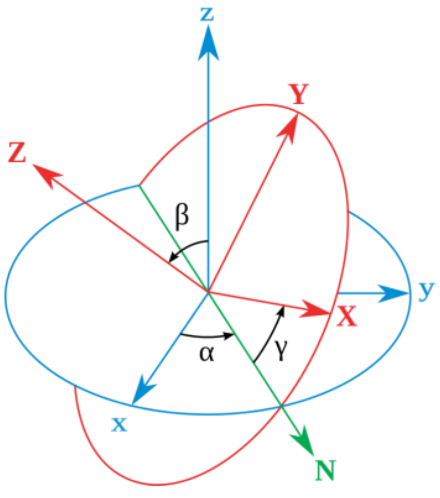


Рис.3. Углы Эйлера, описывающие поворот системы координат.

Функции $D^J_{MM'}(\alpha,\beta,\gamma)$ являются собственными функциями трёх операторов поворота, определяющих трёхмерное вращение:

$$\hat{J}_z = -i\frac{\partial}{\partial\alpha},$$
$$\hat{J}_{z'} = -i\frac{\partial}{\partial\gamma}, \tag{78}$$
$$\hat{J}^2 = -\left[\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + \operatorname{ctg}\beta\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{1}{\sin^2\beta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - 2\cos\beta\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\gamma} + \frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\right)\right],$$

поэтому иногда их называют обобщёнными сферическими функциями. Операторы (78) можно рассматривать как операторы углового момента симметричного волчка при описании ядерного вращения (см. ниже). Дифференциальные уравнения

$$\hat{J}_z D^J_{MM'}(\alpha,\beta,\gamma) = -MD^J_{MM'}(\alpha,\beta,\gamma),$$
$$\hat{J}_{z'} D^J_{MM'}(\alpha,\beta,\gamma) = -M' D^J_{MM'}(\alpha,\beta,\gamma), \tag{79}$$
$$\hat{J}^2 D^J_{MM'}(\alpha,\beta,\gamma) = J(J+1)D^J_{MM'}(\alpha,\beta,\gamma)$$

определяют D-функции Вигнера с точностью до нормировочного и фазового множителей. Для диагональных элементов поворота естественно положить

$$D^J_{MM'}(0,0,0) = \delta_{MM'}, \tag{80.1}$$

а
$$D^J_{MM'}(0,\pi,0) = (-1)^{J+M}\,\delta_{M-M'}. \tag{80.2}$$

Фазовый выбор для D-функции Вигнера зависит от многих факторов. Например, какая, правая или левая, система координат используется, вокруг каких осей производятся повороты и в какой последовательности, в каком направлении отсчитываются углы (см. рис.3) и т.п.

Свойства D-функций Вигнера:

1) унитарность (обратное преобразование поворота)

$$D^{j*}_{mm'}(\alpha,\beta,\gamma) = D^j_{m'm}(-\gamma,-\beta,-\alpha); \tag{81}$$

2) комплексное сопряжение

$$\begin{aligned} D^{j*}_{mm'}(\alpha,\beta,\gamma) &= D^j_{m'm}(-\gamma,-\beta,-\alpha) = e^{-im\alpha}d^j_{m'm}(-\beta)e^{-im'\gamma} = \\ &= e^{-im\alpha}(-1)^{m'-m}d^j_{-m-m'}(-\beta)e^{-im'\gamma} = (-1)^{m'-m}D^j_{-m-m'}(\alpha,\beta,\gamma); \end{aligned} \tag{82}$$

3) условия полноты

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0,\frac{1}{2},1,\ldots}^{\infty}\sum_{m=-j}^{j}\sum_{m'=-j}^{j}\frac{2j+1}{16\pi^2}D^{j*}_{mm'}(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)D^j_{mm'}(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2) = \\ &= \delta(\alpha_1-\alpha_2)\delta(\cos\beta_1-\cos\beta_2)\delta(\gamma_1-\gamma_2). \end{aligned} \tag{83}$$

D-функции Вигнера представимы в виде произведения трёх сомножителей, каждый из которых зависит от одного угла Эйлера:

$$D^J_{MM'}(\alpha,\beta,\gamma) = e^{-iM\alpha} d^J_{MM'}(\beta) e^{-iM'\gamma}, \tag{84}$$

где $d^J_{MM'}(\beta)$ - вещественная функция,

$$d^J_{MM'}(\beta) = (-1)^{J+M}\left[(J+M)!(J-M)!(J+M')!(J-M')!\right]^{1/2} \times$$
$$\times \sum_k (-1)^k \frac{\left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{2k-M-M'}\left(\sin\frac{\beta}{2}\right)^{2J+M+M'-2k}}{k!(J+M-k)!(J+M'-k)!(k-M-M')!}. \tag{85}$$

Суммирование проводится по всем целым неотрицательным числам k от $\max\{0, M'-M\}$ до $\min\{J-M, J+M'\}$.

Связь D-функций Вигнера со сферическими функциями:

$$D^J_{M0}(\alpha,\beta,\gamma) = \sqrt{\frac{4\pi}{2J+1}}(-1)^M Y_{JM}(\beta,\alpha). \tag{86}$$

Рассмотрим сложение угловых моментов двух независимых подсистем, формула (54). В повёрнутой системе координат:

$$\sum_{\mu_1} D^{j_1}_{m_1\mu_1} | j_1\mu_1\rangle \sum_{\mu_2} D^{j_2}_{m_2\mu_2} | j_2\mu_2\rangle = \sum_j C(j_1m_1, j_2m_2 \mid jm) \sum_\mu D^j_{m\mu} | j\mu\rangle =$$
$$= \sum_j C(j_1m_1, j_2m_2 \mid jm) \sum_\mu D^j_{m\mu} \sum_{\mu 1,\mu 2} C(j_1\mu_1, j_2\mu_2 \mid j\mu) | j_1\mu_1\rangle | j_2\mu_2\rangle \tag{87}$$

(во втором равенстве использовано, что $| j\mu\rangle = \sum_{\mu 1,\mu 2} C(j_1\mu_1, j_2\mu_2 \mid j\mu) | j_1\mu_1\rangle | j_2\mu_2\rangle$). Приравнивая коэффициенты при одинаковых состояниях (полный набор), получаем разложение Клебша – Гордана для обобщённых сферических функций:

$$D^{j_1}_{m_1\mu_1} D^{j_2}_{m_2\mu_2} = \sum_{j\mu} C(j_1m_1, j_2m_2 \mid jm) C(j_1\mu_1, j_2\mu_2 \mid j\mu) D^j_{m\mu}. \tag{88}$$

Слева значения μ_1, μ_2 фиксированы, поэтому суммирование по $\mu = \mu_1 + \mu_2$ можно опустить. Обратное соотношение,

$$D^j_{m\mu} = \sum_{\mu_1, m_1} C(j_1m_1, j_2m_2 \mid jm) C(j_1\mu_1, j_2\mu_2 \mid j\mu) D^{j_1}_{m_1\mu_1} D^{j_2}_{m_2\mu_2} \tag{89}$$

называется формулой сложения обобщённых сферических функций. Она позволяет, зная значения D-функций только для j = 1/2 и 1, вычислить их для любых j.

На основе разложения Клебша – Гордана можно получить рекуррентные соотношения для D-функций. Например,

$$\cos\beta D^{J}_{MM'}(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{\sqrt{\left(J^2-M^2\right)\left(J^2-M'^2\right)}}{J(2J+1)}D^{J-1}_{MM'}(\alpha,\beta,\gamma)+$$
$$+\frac{MM'}{J(J+1)}D^{J}_{MM'}(\alpha,\beta,\gamma)+ \qquad (90)$$
$$+\frac{\sqrt{\left[(J+1)^2-M^2\right]\left[(J+1)^2-M'^2\right]}}{(J+1)(2J+1)}D^{J+1}_{MM'}(\alpha,\beta,\gamma),$$

$$\cos\frac{\beta}{2}e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}}D^{J}_{M+1/2,M'+1/2}(\alpha,\beta,\gamma)=$$
$$=\frac{\sqrt{\left(J+M+1/2\right)\left(J+M'+1/2\right)}}{2J+1}D^{J-1/2}_{MM'}(\alpha,\beta,\gamma)+ \qquad (91)$$
$$+\frac{\sqrt{\left(J-M+1/2\right)\left(J-M'+1/2\right)}}{2J+1}D^{J+1/2}_{MM'}(\alpha,\beta,\gamma).$$

Интегралы с D-функциями:

$$\int D^{j}_{mm'}(\alpha,\beta,\gamma)d\theta=\int_0^{2\pi}d\alpha\int_0^{\pi}\sin\beta d\beta\int_0^{2\pi}d\gamma D^{j}_{mm'}(\alpha,\beta,\gamma)=$$
$$=8\pi^2\delta_{j0}\delta_{m0}\delta_{m'0}. \qquad (92)$$

Здесь нужно было воспользоваться стандартным интегралом $\int_0^{2\pi}e^{im\alpha}d\alpha=2\pi\delta_{m0}$ и явным видом функции $d^{j}_{00}(\beta)=P^{j}(\cos\beta)$. Условие ортонормировки:

$$\int D^{j1*}_{m1\mu1}D^{j2}_{m2\mu2}d\theta=\frac{8\pi^2}{2j_1+1}\delta_{j1j2}\delta_{\mu1\mu2}\delta_{m1m2}. \qquad (93)$$

Здесь использовано разложение Клебша – Гордана (88), сводящее задачу к вычисленному выше интегралу с одной D-функцией. В сочетании с условием полноты это условие позволяет разложить любую квадратично интегрируемую функцию углов Эйлера в ряд по D-функциям:

$$f(\alpha,\beta,\gamma)=\sum_{j=0,\frac{1}{2},1,\ldots}^{\infty}\sum_{m=-j}^{j}\sum_{m'=-j}^{j}a_{mm'}^{j}D_{mm'}^{j}(\alpha,\beta,\gamma) \qquad (94)$$

с коэффициентами

$$a_{mm'}^{j}=\frac{2j+1}{16\pi^2}\iiint d\alpha\sin\beta\, d\beta\, d\gamma\; f(\alpha,\beta,\gamma)D_{mm'}^{j*}(\alpha,\beta,\gamma). \qquad (94.1)$$

Последовательное применение разложения Клебша – Гордана позволяет вычислять интегралы, содержащие три и более D-функций –

$$\int D_{m_2\mu_2}^{j_2*}D_{m\mu}^{j}D_{m_1\mu_1}^{j_1}\,d\theta=\frac{8\pi^2}{2j_2+1}C(j_1m_1,jm\,|\,j_2m_2)C(j_1\mu_1,j\mu\,|\,j_2\mu_2). \qquad (95)$$

Эти и подобные интегральные формулы, и их обобщения позволяют проводить вычисления угловых характеристик в ядерной физике аналитически, оставляя численные методы только для радиальных интегралов.

Вращательная инвариантность нарушается во внутренней системе координат, связанной с деформированным ядром. Каждому внутреннему состоянию деформированного ядра соответствует вращательная полоса, отвечающая состояниям с разными значениями полного спина J [10]. Если деформация сохраняет аксиальную симметрию ядра, вращение является плоским, т.е. осуществляется в плоскости, перпендикулярной оси симметрии.

Кроме полного момента J в качестве квантовых чисел можно рассматривать его проекцию M на ось z лабораторной системы координат и проекцию K на ось 3 внутренней системы координат, см. рис. 4. Эти квантовые числа являются канонически сопряжёнными к углам Эйлера и соответствует выбору в качестве коммутирующих операторов $\hat{J}^2, \hat{J}_z, \hat{J}_3$. Последние два оператора коммутируют, т.к. действуют на разные переменные. Для них нормированная собственная функция (см. определение (78) и условие (93))

$$\Phi_{JMK}(\omega)=\sqrt{\frac{2J+1}{8\pi^2}}D_{MK}^{J}(\alpha,\beta,\gamma). \qquad (96)$$

где $\omega=\alpha,\ \beta,\ \gamma$ – углы Эйлера. Таким образом, D-функцию можно рассматривать как волновую функцию, характеризующую ориентацию

[10] Эта ветвь коллективного движения восстанавливает спонтанно нарушенную симметрию (теорема Голдстоуна).

деформированного ядра в лабораторной системе координат. Зависимость углов Эйлера от времени в (96) определяет характер вращения ядра как целого.

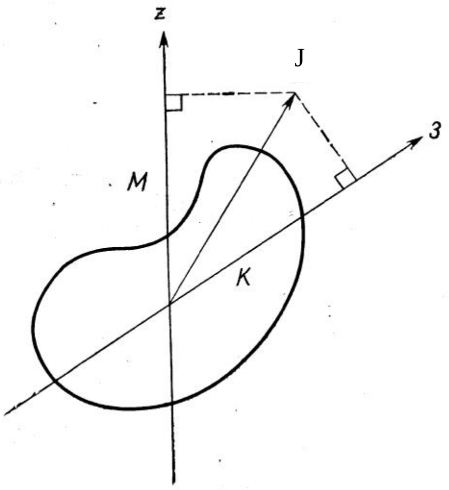


Рис.4. Квантовые числа, описывающие вращение деформированного ядра. Ось z относится к лабораторной системе координат, ось 3 – к системе координат, связанной с ядром

Если деформация ядра не имеет аксиальной симметрии, волновая функция (96) представляется в виде суперпозиции:

$$\Phi_{JM}(\omega) = \sqrt{\frac{2J+1}{8\pi^2}} \sum_K c_K(J) D^J_{MK}(\alpha, \beta, \gamma), \qquad (96.1)$$

где коэффициенты c_K зависят от формы ядра.

Задачи и упражнения:

1. Почему вращательная полоса, построенная на основном состоянии чётно-чётного ядра, всегда имеет K=0?
2. Энергии вращательных состояний в полосе пропорциональны $J(J+1)$, почему нет линейного по моменту слагаемого?

СЛОЖЕНИЕ ТРЁХ УГЛОВЫХ МОМЕНТОВ. КОЭФФИЦИЕНТЫ РАКА

Пусть теперь система состоит из трёх независимых подсистем, $\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_3$. Каждая подсистема обладает своим угловым моментом с операторами: $\hat{j}_1^2$, $\hat{j}_{1z}$, $\hat{j}_2^2$, $\hat{j}_{2z}$, $\hat{j}_3^2$, $\hat{j}_{3z}$. Поскольку взаимодействие между подсистемами отсутствует, можно построить произведения вида $|j_1m_1\rangle\,|j_2m_2\rangle\,|j_3m_3\rangle$ – это собственные состояния полного набора операторов.

Рассмотрим попарное сложение трёх угловых моментов, рис.5.

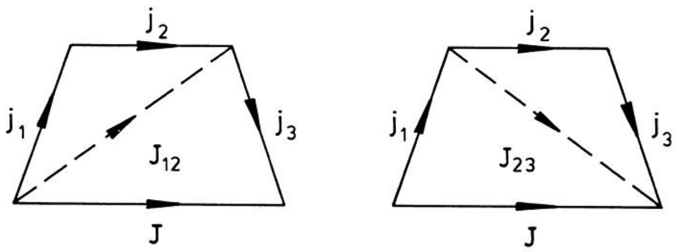


Рис.5. Схемы сложения трёх угловых моментов, промежуточный момент выделен штриховой линией

Первая схема сложения, рис.5 (*слева*):

$$\mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2 = \mathbf{j}_{12}, \qquad \mathbf{j}_{12} + \mathbf{j}_3 = \mathbf{J}\ . \tag{97}$$

Для этой схемы полный набор коммутирующих операторов: $\hat{H}$, $\hat{j}_1^2$, $\hat{j}_2^2$, $(\hat{j}_{12})^2$, $\hat{j}_3^2$, $\hat{J}^2$ и $\hat{J}_z$, а соответствующие собственные функции – $|JM(j_1j_2j_{12}j_3)\rangle\rangle$, скобками выделен порядок сложения моментов.

Другая схема сложения, рис.5 (*справа*):

$$\mathbf{j}_2 + \mathbf{j}_3 = \mathbf{j}_{23}, \qquad \mathbf{j}_{23} + \mathbf{j}_1 = \mathbf{J}\ . \tag{98}$$

Полный набор коммутирующих операторов в этом случае: $\hat{H}$, $\hat{j}_1^2$, $\hat{j}_2^2$, $\hat{j}_3^2$, $(\hat{j}_{23})^2$, $\hat{J}^2$ и $\hat{J}_z$, а соответствующие собственные функции – $|JM(j_2j_3j_{23}j_1)\rangle\rangle$.

Оба представления связаны унитарным преобразованием:

$$\left| JM\left(j_1 j_2 j_{12} j_3\right)\right\rangle = \sum_{j_{23}} \sqrt{(2j_{12}+1)\cdot(2j_{23}+1)}\cdot W(j_1 j_2\ J\ j_3 \mid j_{12}\ j_{23})\times$$
$$\times\left| JM\left(j_2 j_3 j_{23} j_1\right)\right\rangle, \tag{99}$$

коэффициенты W которого можно рассматривать как определение коэффициентов Рака. Это преобразование не зависит от ориентации системы координат и поэтому диагонально по M, а сами коэффициенты W не зависят от M.

Рассматривая попарное сложение моментов как в (53), коэффициенты Рака можно связать с коэффициентами Клебша - Гордана:

$$W(j_1 j_2 J j_3 \mid j_{12} j_{23}) = \frac{1}{\sqrt{(2j_{12}+1)(2j_{23}+1)}} \sum_{m_1 m_2 m_3} C(j_1 m_1 j_2 m_2 \mid j_{12} m')\times$$
$$\times C(j_{12} m' j_3 m_3 \mid JM)\cdot C(j_2 m_2 j_3 m_3 \mid j_{23} m'')\cdot C(j_{23} m'' j_1 m_1 \mid JM). \tag{100}$$

Так как коэффициенты Клебша-Гордана вещественны, коэффициенты Рака также вещественны. Соотношение (100) фиксирует и фазу коэффициентов Рака. Значения всех моментов в коэффициентах Рака являются целыми или полуцелыми неотрицательными числами. Для каждой из четырёх троек моментов должны выполняться правила треугольника, в противном случае W=0.

Если один из шести моментов равен 0, коэффициент Рака –

$$W\left(abcd \mid 0 f\right) = (-1)^{b+c-f}\ \frac{\delta_{ab}\delta_{cd}}{\sqrt{(2b+1)(2c+1)}}\ . \tag{101}$$

Эта формула широко используется в теории при описании S-волнового рассеяния.

Коэффициенты Рака обладают следующими свойствами симметрии:

$$W\left(abcd \mid ef\right) = W\left(badc \mid ef\right) = W\left(cdab \mid ef\right) = W\left(acbd \mid fe\right) =$$
$$= (-1)^{e+f-a-d} W\left(ebcf \mid ad\right) = (-1)^{e+f-b-c} W\left(aefd \mid bc\right). \tag{102}$$

Вместо коэффициентов Рака часто используют $6j$-символы Вигнера, отличающиеся только выбором фазы:

$$\begin{Bmatrix} abc \\ def \end{Bmatrix} = (-1)^{a+b+d+e} W\left(abed \mid cf\right). \tag{103}$$

Используя свойства симметрии (102) можно убедиться, что $6j$-символы Вигнера инвариантны при любой перестановке столбцов и при перестановке верхних и нижних элементов в любых двух столбцах:

$$
\begin{Bmatrix} abc \\ def \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} acb \\ dfe \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} bac \\ edf \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} bca \\ efd \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} cab \\ fde \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} cba \\ fed \end{Bmatrix} =
$$

$$
= \begin{Bmatrix} aef \\ dbc \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} afe \\ dcb \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} eaf \\ bdc \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} efa \\ bcd \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} fae \\ cdb \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} fea \\ cbd \end{Bmatrix} = \cdots \qquad (104)
$$

Подобные соотношения связывают 3!×4 = 24 6j-символа[11]. Если хотя бы один из индексов равен 0, то перестановками столбцов и строк 6j-символ можно привести к виду (101) и вычислить.

Унитарность преобразования (99) означает, что его коэффициенты удовлетворяют условиям ортогональности и нормировки:

$$
\sum_c (2c+1)(2f+1) \begin{Bmatrix} abc \\ def \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} abc \\ def' \end{Bmatrix} = \delta_{ff'},
$$

$$
\sum_f (2c+1)(2f+1) \begin{Bmatrix} abc \\ def \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} abc' \\ def \end{Bmatrix} = \delta_{cc'}. \qquad (105)
$$

В преобразовании (99), последовательно используя в его правой и левой части определение коэффициентов Клебша – Гордана (53), можно вернуться к первоначальному представлению $\left| j_1 m_1, j_2 m_2, j_3 m_3 \right\rangle$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых состояниях (полный набор), получим полезное соотношение:

$$
C\left(j_1 m_1, j_2 m_2 \mid j m_1 + m_2\right) \cdot C\left(j m_1 + m_2, j_3 m_3 \mid j_4 m_1 + m_2 + m_3\right) =
$$

$$
= \sum_s \left\{ \begin{aligned} & \sqrt{(2s+1)(2j+1)} \cdot C\left(j_2 m_2, j_3 m_3 \mid s m_2 + m_3\right) \times \\ & \times C\left(j_1 m_1, s m_2 + m_3 \mid j_4 m_1 + m_2 + m_3\right) \cdot W\left(j_1 j_2 j_4 j_3 \mid js\right) \end{aligned} \right\}, \qquad (106)
$$

которое используются для вычисления сложных выражений, содержащих коэффициенты Клебша – Гордана.

Пусть дана сумма с чётным числом коэффициентов Клебша – Гордана. Попарно выбирая коэффициенты C из суммы и используя их симметрию, нужно привести аргументы к виду левой части тождества (106). Далее следует выразить эти пары согласно (106) через коэффициенты Рака и другую пару коэффициентов Клебша – Гордана, при этом суммы

[11] Если сопоставить шести символам $\begin{Bmatrix} abc \\ def \end{Bmatrix}$ шесть сторон правильного тетраэдра, то 6j-символ не изменяется при любых перестановках ребер, сохраняющих тетраэдр. Четыре грани тетраэдра отражают четыре правила «треугольника» для моментов.

расцепятся по схеме $\sum_{m_i} C\cdot C\cdot C\cdot C \to \sum W\cdot W\cdot \sum_{m'_i} C\cdot C \sum_{m''_i} C\cdot C$. Для них следует использовать соотношения ортонормировки. В результате останутся только символы Кронекера и коэффициенты Рака. Последних будет вдвое меньше, чем коэффициентов Клебша – Гордана в исходном выражении. Значения коэффициентов Рака табулированы во многих справочниках.

Для $6j$-символов, или коэффициентов Рака, существует несколько независимых алгебраических выражений. Сам Рака предложил следующее:

$$\begin{Bmatrix} abc \\ def \end{Bmatrix} = \Delta(abc)\Delta(cde)\Delta(aef)\Delta(bdf)\times$$
$$\times \sum_n (-1)^n (n+1)! \Bigg/ \begin{bmatrix} (n-a-b-c)!(n-c-d-e)!(n-a-e-f)!\times \\ \times(n-b-d-f)!(a+b+d+e-n)!\times \\ \times(a+c+d+f-n)!(b+c+e+f-n)! \end{bmatrix}, \qquad (107)$$

где n – целое неотрицательное число, при котором все факториалы имеют смысл, а Δ-символ задан равенством (65).

Выражения для $6j$-символов, когда один из индексов равен ½ или 1, приведены в таблицах 4 и 5.

Таблица 3. $6j$-символы $\begin{Bmatrix} a & bc \\ 1/2 & ef \end{Bmatrix}$, $s = a+b+c$.

f	$e = c + 1/2$
$b + 1/2$	$(-1)^{s+1}\frac{1}{2}\left[\frac{(s+2)(s-2a+1)}{(2b+1)(b+1)(2c+1)(c+1)}\right]^{1/2}$
$b - 1/2$	$(-1)^{s}\frac{1}{2}\left[\frac{(s-2c)(s-2b+1)}{b(2b+1)(2c+1)(c+1)}\right]^{1/2}$
f	$e = c - 1/2$
$b + 1/2$	$(-1)^{s}\frac{1}{2}\left[\frac{(s-2c+1)(s-2b)}{(2b+1)(b+1)c(2c+1)}\right]^{1/2}$
$b - 1/2$	$(-1)^{s}\frac{1}{2}\left[\frac{(s+1)(s-2a)}{b(2b+1)c(2c+1)}\right]^{1/2}$

Таблица 4. 6j-символы $\begin{Bmatrix} a & b & c \\ 1 & e & f \end{Bmatrix}$, $s = a + b + c$.

f	$e = c + 1$
$b+1$	$(-1)^s \frac{1}{2}\left[\frac{(s+2)(s+3)(s-2a+1)(s-2a+2)}{(2b+1)(b+1)(2b+3)(2c+1)(c+1)(2c+3)}\right]^{1/2}$
b	$(-1)^{s+1} \frac{1}{2}\left[\frac{(s+2)(s-2c)(s-2b+1)(s-2a+1)}{b(2b+1)(b+1)(2c+1)(c+1)(2c+3)}\right]^{1/2}$
$b-1$	$(-1)^s \frac{1}{2}\left[\frac{(s-2c-1)(s-2c)(s-2b+1)(s-2b+2)}{(2b-1)b(2b+1)(2c+1)(c+1)(2c+3)}\right]^{1/2}$
f	$e = c$
$b+1$	$(-1)^{s+1} \frac{1}{2}\left[\frac{(s+2)(s-2c+1)(s-2b)(s-2a+1)}{(2b+1)(b+1)(2b+3)c(2c+1)(c+1)}\right]^{1/2}$
b	$(-1)^{s+1} \frac{1}{2}\left[\frac{-a(a+1)+b(b+1)+c(c+1)}{b(2b+1)(b+1)c(2c+1)(c+1)}\right]^{1/2}$
$b-1$	$(-1)^s \frac{1}{2}\left[\frac{(s+1)(s-2c)(s-2b+1)(s-2a)}{(2b-1)b(2b+1)c(2c+1)(c+1)}\right]^{1/2}$
f	$e = c - 1$
$b+1$	$(-1)^s \frac{1}{2}\left[\frac{(s-2c+1)(s-2c+2)(s-2b-1)(s-2b)}{(2b+1)(b+1)(2b+3)(2c-1)c(2c+1)}\right]^{1/2}$
b	$(-1)^s \frac{1}{2}\left[\frac{(s+1)(s-2c+1)(s-2b)(s-2a)}{b(2b+1)(b+1)(2c-1)c(2c+1)}\right]^{1/2}$
$b-1$	$(-1)^s \frac{1}{2}\left[\frac{s(s+1)(s-2a-1)(s-2a)}{(2b-1)b(2b+1)(2c-1)c(2c+1)}\right]^{1/2}$

ВЫСШИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ПЕРЕСВЯЗКИ УГЛОВЫХ МОМЕНТОВ

$9j$-символы Вигнера или коэффициенты Фано можно определить как коэффициенты преобразования между различными схемами сложения четырёх угловых моментов (рис.6):

$$\left\langle j_1 j_2 (j_{12}) j_3 j_4 (j_{34}) jm \middle| j_1 j_3 (j_{13}) j_2 j_4 (j_{24}) j' m' \right\rangle =$$
$$= \delta_{jj'} \delta_{mm'} \sqrt{(2j_{12}+1)(2j_{13}+1)(2j_{24}+1)(2j_{34}+1)} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & j \end{Bmatrix}. \quad (108)$$

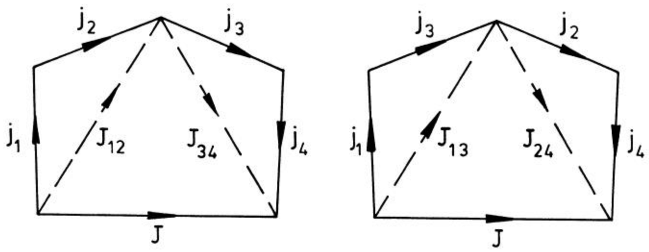


Рис.6. Схемы сложения четырёх угловых моментов

Они также могут быть представлены в виде суммы произведений шести коэффициентов Клебша – Гордана:

$$\sum_{m_i m_{ik}} \begin{Bmatrix} C(j_1 m_1, j_2 m_2 \mid j_{12} m_{12}) C(j_3 m_3, j_4 m_4 \mid j_{34} m_{34}) C(j_{12} m_{12}, j_{34} m_{34} \mid jm) \times \\ \times C(j_1 m_1, j_3 m_3 \mid j_{13} m_{13}) C(j_2 m_2, j_4 m_4 \mid j_{24} m_{24}) C(j_{13} m_{13}, j_{24} m_{24} \mid j' m') \end{Bmatrix} =$$
$$= \delta_{jj'} \delta_{mm'} \sqrt{(2j_{12}+1)(2j_{13}+1)(2j_{24}+1)(2j_{34}+1)} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & j \end{Bmatrix}. \quad (109)$$

В специальной литературе приводятся свойства коэффициентов Фано и их явный вид. Здесь отметим только их связь с $6j$-символами:

$$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{Bmatrix} = \sum_x (-1)^{2x} (2x+1) \begin{Bmatrix} abc \\ fjx \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} def \\ bxh \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} ghf \\ xad \end{Bmatrix} \quad (110)$$

Для систем, содержащих более четырёх угловых моментов, коэффициенты пересвязки можно выразить через инварианты с более высокой симметрией, $12j$-, $15j$-символы и т.д. Они обладают такими же свойствами, как $6j$- и $9j$-символы, и могут быть выражены через суммы произведений коэффициентов более низкого порядка.

ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ. ТЕОРЕМА ВИГНЕРА – ЭККАРТА

Неприводимым тензорным оператором $\hat{T}_k$ ранга k (k – целое или полуцелое) называется совокупность ($2k$+1) операторов $\hat{T}_{kx}$ (x=-k, -k+1,... k-1, k), удовлетворяющих следующим коммутационным соотношениям с циклическими компонентами полного углового момента $\hat{\mathbf{J}}$:

$$\left[\hat{J}_{\pm 1}, \hat{T}_{kx}\right] = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pm i\delta} \sqrt{k(k+1) - x(x+1)} \hat{T}_{kx\pm 1},$$
$$\left[\hat{J}_0, \hat{T}_{kx}\right] = x\hat{T}_{kx}. \qquad (111)$$

Операторы $\hat{T}_{kx}$ называются стандартными компонентами неприводимого тензорного оператора. Скалярный оператор, например, является неприводимым тензорным оператором ранга 0. Векторный оператор – неприводимый тензорный оператор ранга 1, его циклические компоненты являются стандартными компонентами.

Теорема Вигнера – Эккарта определяет зависимость матричного элемента неприводимого тензорного оператора произвольного вида от ориентации системы координат, т.е. от проекций m, m' и x,

$$\left\langle n'j'm'\left|\hat{T}_{kx}\right|njm\right\rangle = (-1)^{2k} C(jm, kx \mid j'm') \frac{\left\langle n'j'\left\|\hat{T}_k\right\|nj\right\rangle}{\sqrt{2j'+1}}. \qquad (112)$$

Здесь $\left|njm\right\rangle$ – волновые функции, описывающие состояние квантово-механической системы с определённым угловым моментом j и его проекцией m на ось квантования (n – совокупность остальных квантовых чисел, характеризующих состояние системы). Инвариантный множитель $\left\langle n'j'\left\|\hat{T}_k\right\|nj\right\rangle$ называется приведённым матричным элементом. При таком определении приведённый матричный элемент единичного оператора $\hat{I}$ –

$$\left\langle n'j'\left\|\hat{I}\right\|nj\right\rangle = \sqrt{2j+1}\delta_{nn'}\delta_{jj'}. \qquad (113)$$

Теорема Вигнера – Эккарта приводит к следующим правилам сумм:

$$\sum_{mx} \left|\left\langle n'j'm'\left|\hat{T}_{kx}\right|njm\right\rangle\right|^2 = \frac{\left|\left\langle n'j'\left\|\hat{T}_k\right\|nj\right\rangle\right|^2}{2j'+1}, \qquad (114.1)$$

$$\sum_{m'x}\left|\left\langle n'j'm'\left|\hat{T}_{kx}\right|njm\right\rangle\right|^2=\frac{\left|\left\langle n'j'\left\|\hat{T}_k\right\|nj\right\rangle\right|^2}{2j+1},\qquad(114.2)$$

$$\sum_{mm'}\left|\left\langle n'j'm'\left|\hat{T}_{kx}\right|njm\right\rangle\right|^2=\frac{\left|\left\langle n'j'\left\|\hat{T}_k\right\|nj\right\rangle\right|^2}{2k+1}.\qquad(114.3)$$

Из двух неприводимых тензорных операторов $\hat{P}_{ay}$ и $\hat{Q}_{bz}$ можно построить прямое произведение $\hat{P}_{ay}\cdot\hat{Q}_{bz}$ и неприводимое произведение $\left\{\hat{P}_a\otimes\hat{Q}_b\right\}_{cw}$ ранга c. Матричные элементы прямого тензорного произведения –

$$\begin{gathered}\left\langle n'j'm'\left|\hat{P}_{ay}\cdot\hat{Q}_{bz}\right|njm\right\rangle=\frac{(-1)^{2a+2b}}{\sqrt{2j'+1}}\sum_{n_1j_1m_1}C\left(jm,bz\mid j_1m_1\right)\times\\ \times C\left(j_1m_1,ay\mid j'm'\right)\frac{1}{\sqrt{2j_1+1}}\left\langle n'j'\left\|\hat{P}_a\right\|n_1j_1\right\rangle\left\langle n_1j_1\left\|\hat{Q}_b\right\|nj\right\rangle.\end{gathered}\qquad(115)$$

Матричные элементы неприводимого тензорного произведения –

$$\begin{gathered}\left\langle n'j'm'\left|\left\{\hat{P}_a\otimes\hat{Q}_b\right\}_{cw}\right|njm\right\rangle=(-1)^{j'+j-c}\sqrt{\frac{2c+1}{2j'+1}}\times\\ \times C\left(jm,cw\mid j'm'\right)\sum_{n_1j_1}\begin{Bmatrix}abc\\ jj'\,j_1\end{Bmatrix}\left\langle n'j'\left\|\hat{P}_a\right\|n_1j_1\right\rangle\left\langle n_1j_1\left\|\hat{Q}_b\right\|nj\right\rangle.\end{gathered}\qquad(116)$$

Последняя формула позволяет вычислять матричные элементы скалярного произведения двух тензоров ранга a, если положить $c = 0$:

$$\begin{gathered}\left\langle n'j'm'\left|\left(\hat{P}_a\cdot\hat{Q}_b\right)\right|njm\right\rangle=\delta_{jj'}\delta_{mm'}\frac{1}{2j+1}\times\\ \times\sum_{n_1j_1}(-1)^{-j+j_1}\left\langle n'j\left\|\hat{P}_a\right\|n_1j_1\right\rangle\left\langle n_1j_1\left\|\hat{Q}_b\right\|nj\right\rangle.\end{gathered}\qquad(117)$$

Из трёх неприводимых тензорных операторов, $\hat{P}_{ay}$, $\hat{Q}_{bz}$ и $\hat{R}_{dw}$, можно построить уже пять произведений. Вычисление матричных элементов для них сводится к последовательному применению формул (115) и (116).

В заключение приведём примеры вычисления матричных элементов основных операторов и их тензорных произведений.

Единичный оператор $\hat{I}$ представляет собой неприводимый тензор нулевого ранга, не действующий на пространственные и спиновые переменные. В любом представлении отличны от нуля и равны единице только диагональные по всем квантовым числам матричные элементы

$$\left\langle \lambda' \middle| \hat{I} \middle| \lambda \right\rangle = \left\langle \lambda' \middle| \lambda \right\rangle = \delta_{\lambda'\lambda} . \tag{118}$$

Приведённые матричные элементы единичного оператора:

$$\begin{aligned} &\left\langle l \middle\| \hat{I} \middle\| l \right\rangle = \sqrt{2l+1} , \\ &\left\langle s \middle\| \hat{I} \middle\| s \right\rangle = \sqrt{2s+1} , \\ &\left\langle l' s' J \middle\| \hat{I} \middle\| lsJ \right\rangle = \sqrt{2J+1}\delta_{ll'}\delta_{ss'}. \end{aligned} \tag{119}$$

Единичный векторный оператор $\hat{\mathbf{n}}_1(\vartheta,\varphi)$ действует только на угловые переменные. Матричные элементы его циклических компонент,

$$\left\langle l' m' \middle| \hat{n}_{1\mu} \middle| lm \right\rangle = \frac{\left\langle l' \middle\| \hat{n}_1 \middle\| l \right\rangle}{\sqrt{2l'+1}} C(lm,1\mu \mid l'm') , \tag{120}$$

отличны от нуля только, если $l' = l \pm 1$, а приведённый матричный элемент

$$\left\langle l' \middle\| \hat{n}_1 \middle\| l \right\rangle = \sqrt{2l+1} C(l0,10 \mid l'0), \tag{120.1}$$

Матричные элементы прямого произведения циклических компонент двух операторов $\hat{\mathbf{n}}_1(\vartheta,\varphi)$

$$\begin{aligned} \left\langle l'm' \middle| \hat{n}_{1\mu} n'_{1\nu} \middle| lm \right\rangle &= \frac{(-1)^{\mu}}{3}\delta_{ll'}\delta_{mm'}\delta_{\mu-\nu} + \\ &+ \sqrt{\frac{2}{3}\frac{2l+1}{2l'+1}} C(l0,20 \mid l'0) C(1\mu,1\nu \mid 2\kappa) C(lm,2\kappa \mid l'm'). \end{aligned} \tag{121}$$

отличны от нуля, только если $l' = l,\ l \pm 2$.

Матричные элементы циклических компонент оператора $\nabla \equiv \hat{\nabla}_{\mathbf{1}}(r,\vartheta,\varphi)$

$$\left\langle n' l' m' \middle| \hat{\nabla}_{\mathbf{1}\mu} \middle| nlm \right\rangle = \frac{\left\langle n' l' \middle\| \hat{\nabla}_{\mathbf{1}} \middle\| nl \right\rangle}{\sqrt{2l'+1}} C(lm,1\mu \mid l'm'), \tag{122}$$

где

$$\left\langle n' l' \middle\| \hat{\nabla}_{\mathbf{1}} \middle\| nl \right\rangle = \sqrt{2l+1} A_{n'l',nl}\delta_{l'l+1} - \sqrt{l} B_{n'l',nl}\delta_{l'l-1} , \tag{123}$$

$$A_{n'l',nl} = \int_0^{\infty} \Psi^*_{n'l'}(r)\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l}{r}\right)\Psi_{nl}(r) r^2 dr , \tag{123.1}$$

$$B_{n'l',nl} = \int_0^\infty \Psi^*_{n'l'}(r)\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{l+1}{r}\right)\Psi_{nl}(r) r^2 dr\,, \tag{123.2}$$

а $\Psi_{nl}(r)$ - радиальная часть волновой функции. Матричные элементы (122) отличны от нуля только, если $l' = l \pm 1$. В развёрнутом виде:

$$\langle n'l+1m'|\hat{\nabla}_{1\pm1}|nlm\rangle = \sqrt{\frac{(l\pm m+1)(l\pm m+2)}{2(2l+1)(2l+3)}}A_{n'l+1,nl}\delta_{m'm\pm1}\,, \tag{124.1}$$

$$\langle n'l+1m'|\hat{\nabla}_{10}|nlm\rangle = \sqrt{\frac{(l-m+1)(l+m+1)}{(2l+1)(2l+3)}}A_{n'l+1,nl}\delta_{m'm}\,, \tag{124.2}$$

$$\langle n'l-1m'|\hat{\nabla}_{1\pm1}|nlm\rangle = -\sqrt{\frac{(l\mp m-1)(l\mp m)}{2(2l+1)(2l-1)}}B_{n'l-1,nl}\delta_{m'm\pm1}\,, \tag{124.3}$$

$$\langle n'l-1m'|\hat{\nabla}_{10}|nlm\rangle = \sqrt{\frac{(l-m)(l+m)}{(2l+1)(2l-1)}}BA_{n'l-1,nl}\delta_{m'm}\,. \tag{124.4}$$

Матричные элементы декартовых компонент оператора $\hat{\nabla}_{\mathbf{1}}(r,\vartheta,\varphi)$:

$$\begin{aligned}\langle n'l'm\pm1|\hat{\nabla}_x|nlm\rangle = \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(l\pm m+1)(l\pm m+2)}{(2l+1)(2l+3)}}A_{n'l+1,nl}\delta_{l'l+1} \pm \\ \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(l\mp m-1)(l\mp m)}{(2l+1)(2l-1)}}B_{n'l-1,nl}\delta_{l'l-1},\end{aligned} \tag{125.1}$$

$$\begin{aligned}\langle n'l'm\pm1|\hat{\nabla}_y|nlm\rangle = \frac{i}{2}\sqrt{\frac{(l\pm m+1)(l\pm m+2)}{(2l+1)(2l+3)}}A_{n'l+1,nl}\delta_{l'l+1} - \\ -\frac{i}{2}\sqrt{\frac{(l\mp m-1)(l\mp m)}{(2l+1)(2l-1)}}B_{n'l-1,nl}\delta_{l'l-1},\end{aligned} \tag{125.2}$$

$$\begin{aligned}\langle n'l'm|\hat{\nabla}_z|nlm\rangle = \sqrt{\frac{(l-m+1)(l+m+1)}{(2l+1)(2l+3)}}A_{n'l+1,nl}\delta_{l'l+1} + \\ +\sqrt{\frac{(l-m)(l+m)}{(2l+1)(2l-1)}}B_{n'l-1,nl}\delta_{l'l-1},\end{aligned} \tag{125.3}$$

остальные равны нулю.

Матричные элементы угловой части оператора $\hat{\nabla}_{\mathbf{1}}(r,\vartheta,\varphi)$,

$$\hat{\nabla}_\Omega = -i\mathbf{n}\times\hat{\mathbf{L}}\,, \tag{126}$$

которая не зависит от радиуса *r*, имеют более простой вид:

$$\langle l'm'|\left(\hat{\nabla}_\Omega\right)_{1\mu}|lm\rangle = \frac{\langle l'\|\left(\hat{\nabla}_\Omega\right)_1\|l\rangle}{\sqrt{2l'+1}} C(lm,1\mu\,|\,l'm'), \tag{127}$$

где

$$\langle l'\|\left(\hat{\nabla}_\Omega\right)_1\|l\rangle = -\left\{l\sqrt{l+1}\,\delta_{l'l+1} + (l+1)\sqrt{l}\,\delta_{l'l-1}\right\}. \tag{128}$$

Последнюю формулу можно получить из (123), если сделать формальную замену: $A_{n'l',nl} \to -l$, $B_{n'l',nl} \to l+1$. Эта замена делает справедливыми формулы (124), (125) для оператора $\left(\nabla_\Omega\right)_1$.

Матричные элементы оператора полного углового момента $\hat{\mathbf{J}}_1 \equiv \hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}$ имеют вид

$$\langle l's'J'M'|\hat{J}_{1\mu}|lsJM\rangle = \frac{\langle l's'J'\|\hat{\mathbf{J}}_1\|lsJ\rangle}{\sqrt{2J'+1}} C(JM,1\mu\,|\,J'M'), \tag{129}$$

где

$$\langle l's'J'\|\hat{\mathbf{J}}_1\|lsJ\rangle = \delta_{ll'}\delta_{ss'}\delta_{JJ'}\sqrt{J(J+1)(2J+1)}\,. \tag{130}$$

В развёрнутой записи, опуская тривиальные индексы l и s,

$$\langle JM\pm1|\hat{J}_{1\pm1}|JM\rangle = \mp\sqrt{\frac{(J\pm M+1)(J\mp M)}{2}}\,, \tag{131.1}$$

$$\langle JM|\hat{J}_{10}|JM\rangle = M\,, \tag{131.2}$$

остальные матричные элементы равны нулю. Ненулевые матричные элементы декартовых компонент оператора $\hat{\mathbf{J}}_1$:

$$\langle JM\pm1|\hat{J}_x|JM\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{(J\pm M+1)(J\mp M)}\,, \tag{132.1}$$

$$\langle JM\pm1|\hat{J}_y|JM\rangle = \mp\frac{i}{2}\sqrt{(J\pm M+1)(J\mp M)}\,, \tag{132.2}$$

$$\langle JM|\hat{J}_z|JM\rangle = M\,. \tag{132.3}$$

Матричные элементы оператора квадрата полного углового момента –

$$\langle J'M'|\hat{J}^2|JM\rangle = \delta_{JJ'}\delta_{MM'}J(J+1). \tag{133}$$

Матричные элементы операторов орбитального момента $\hat{\mathbf{L}}_1 \equiv \hat{\mathbf{L}}$ или спина $\hat{\mathbf{S}}_1 \equiv \hat{\mathbf{S}}$ получаются из выражений (129-133) после замен

$J \to l,\ M \to m,\ \hat{J}_{1\mu} \to \hat{L}_{1\mu}$ или $J \to s,\ M \to m_s,\ \hat{J}_{1\mu} \to \hat{S}_{1\mu}$,
соответственно.

Матричные элементы оператора сферической функции $\hat{Y}_{\lambda\nu} \equiv Y_{\lambda\nu}(\vartheta,\varphi)$:

$$\langle l'm'|\hat{Y}_{\lambda\mu}|lm\rangle = \frac{\langle l'\|\hat{\mathbf{Y}}_\lambda\|l\rangle}{\sqrt{2l'+1}} C(lm,\lambda\nu\,|\,l'm'), \tag{134}$$

где

$$\langle l'\|\hat{\mathbf{Y}}_\lambda\|l\rangle = \sqrt{\frac{(2\lambda+1)(2l+1)}{4\pi}} C(l0,\lambda 0\,|\,l'0). \tag{135}$$

Матричные элементы произведений операторов $\hat{\nabla}_\Omega$ и $\hat{\mathbf{Y}}_\lambda$:

$$\langle l'm'|(\hat{\nabla}_\Omega)_{1\mu}\hat{Y}_{\lambda\nu}|lm\rangle = -\sqrt{\frac{(2\lambda+1)(2l+1)}{4\pi(2l'+1)}} \times$$
$$\times\left\{\begin{array}{l} (l'-1)\sqrt{\dfrac{l'}{2l'-1}}C(l0,\lambda 0\,|\,l'-1\,0)C(lm,\lambda\nu\,|\,l'-1m+\nu)\times \\ \times C(l'-1m+\nu,1\mu\,|\,l'm') + (l'+2)\sqrt{\dfrac{l'+1}{2l'+3}}C(l0,\lambda 0\,|\,l'+1\,0)\times \\ \times C(lm,\lambda\nu\,|\,l'+1m+\nu)C(l'+1m+\nu,1\mu\,|\,l'm') \end{array}\right\}, \tag{136}$$

$$\langle l'm'|\{(\hat{\nabla}_\Omega)_1 \otimes \hat{\mathbf{Y}}_\lambda\}_{\lambda'\nu'}|lm\rangle = (-1)^{\lambda'+l'+l}\sqrt{\frac{(2\lambda+1)(2l+1)(2\lambda'+1)}{4\pi(2l'+1)}} \times$$
$$\times \sum_k \langle l'\|(\hat{\nabla}_\Omega)_1\|k\rangle C(l0,\lambda 0\,|\,k0)\begin{Bmatrix}\lambda & 1 & \lambda' \\ l' & l & k\end{Bmatrix} C(lm,\lambda'\nu'\,|\,l'm'). \tag{137}$$

Матричные элементы более сложных операторов могут быть получены из общих выражений (115) и (116) с использованием рассмотренных примеров.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Произвольный поворот координатной системы относительно её начала $S(x,y,z) \to S'(x',y',z')$ определяется тремя параметрами, описывающими последовательные повороты вокруг координатных осей. Для этого чаще всего используют углы Эйлера α, β, γ, см. рис.3. При повороте системы координат длина векторов остаётся неизменной, но меняются углы ϑ, φ, определяющие их направление. Связь углов ϑ, φ и ϑ', φ' даётся формулами

$$\cos\vartheta' = \cos\vartheta\cos\beta + \sin\vartheta\sin\beta\cos(\varphi-\alpha),$$
$$\operatorname{ctg}(\varphi'+\gamma) = \operatorname{ctg}(\varphi-\alpha)\cos\beta - \frac{\operatorname{ctg}\vartheta\sin\beta}{\sin(\varphi-\alpha)}. \tag{138.1}$$

Обратные соотношения:

$$\cos\vartheta = \cos\vartheta'\cos\beta - \sin\vartheta'\sin\beta\cos(\varphi'+\gamma),$$
$$\operatorname{ctg}(\varphi-\alpha) = \operatorname{ctg}(\varphi'+\gamma)\cos\beta + \frac{\operatorname{ctg}\vartheta'\sin\beta}{\sin(\varphi'+\gamma)}. \tag{138.2}$$

Среди других наборов параметров поворота системы координат используют направление оси поворота $\mathbf{n}(\Theta,\Phi)$ (2 параметра) и угол поворота ω (1 параметр), рис. 7.

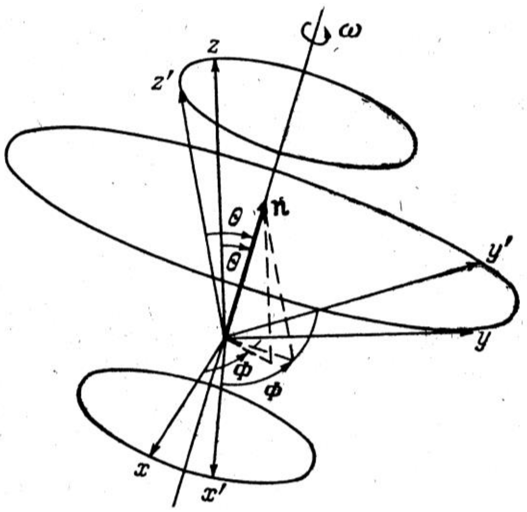


Рис. 7. Поворот системы координат на угол ω вокруг оси $\mathbf{n}(\Theta,\Phi)$

Направляющие косинусы орта $\mathbf{n}(\Theta,\Phi)$ одинаковы в исходной и повернутой системах координат:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_x = \mathbf{n}\cdot\mathbf{e}'_x = \sin\Theta\cos\Phi,\\
&\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_y = \mathbf{n}\cdot\mathbf{e}'_y = \sin\Theta\sin\Phi, \qquad (139)\\
&\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_z = \mathbf{n}\cdot\mathbf{e}'_z = \cos\Theta.
\end{aligned}$$

Для векторов, направление которых не совпадает с направлением **n**, сферические углы меняются при повороте системы координат. Связь углов ϑ,φ и ϑ',φ' даётся более громоздкими формулами по сравнению с (138) и опущена здесь. Использование параметров $\mathbf{n}(\Theta,\Phi)$ и ω позволяет записать преобразование радиус-вектора **r** в компактном виде:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{r}' = \mathbf{r}\cos\omega + \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})(1-\cos\omega) + [\mathbf{n}\times\mathbf{r}]\sin\omega,\\
&\mathbf{r} = \mathbf{r}'\cos\omega + \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}')(1-\cos\omega) - [\mathbf{n}\times\mathbf{r}']\sin\omega.
\end{aligned} \qquad (140)$$

Опущенные формулы преобразования от ϑ,φ к ϑ',φ' и наоборот получаются при проектировании (140) на координатные оси.

Углы ω,Θ,Φ выражаются через углы Эйлера, и наоборот:

$$\begin{aligned}
&\cos\frac{\omega}{2} = \cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}, \quad \operatorname{tg}\Theta = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}}{\sin\dfrac{\alpha+\gamma}{2}}, \quad \Phi = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha-\gamma}{2},\\
&\sin\frac{\beta}{2} = \sin\Theta\sin\frac{\omega}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2} = \cos\Theta\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}, \quad \frac{\alpha-\gamma}{2} = \Phi - \frac{\pi}{2}.
\end{aligned} \qquad (141)$$

Якобиан этого преобразования –

$$\left\|\frac{\partial(\alpha,\beta,\gamma)}{\partial(\omega,\Theta,\Phi)}\right\| = \left\|\frac{\partial(\omega,\Theta,\Phi)}{\partial(\alpha,\beta,\gamma)}\right\|^{-1} = \frac{4\sin\Theta}{\sin\beta}\sin^2\frac{\omega}{2}. \qquad (142)$$

Преобразование квантово-механических величин при повороте системы координат определяется операторами поворота $\hat{D}(\alpha,\beta,\gamma)$ или $\hat{U}(\omega,\Theta,\Phi)$. Оператор $\hat{D}(\alpha,\beta,\gamma)$ может быть записан в виде

$$\hat{D}(\alpha,\beta,\gamma) = \exp\left(-i\gamma\hat{J}_{z'}\right)\exp\left(-i\beta\hat{J}_{y'}\right)\exp\left(-i\alpha\hat{J}_z\right), \qquad (143)$$

где $\hat{J}_i$ - проекции оператора полного углового момента. Оператор

$$\hat{U}(\omega,\Theta,\Phi) = \exp\left(-i\omega\,\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{J}}\right), \qquad (144)$$

где $\hat{\mathbf{J}}$ - оператор полного углового момента. Эти операторы являются унитарными. Заметим, что $\hat{D}(\alpha,\beta,\gamma) \equiv \hat{U}(\omega,\Theta,\Phi)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бор О., Моттельсон Б.** Структура атомного ядра, т.1. М.: «Мир», 1971 – 456 с.
2. **Варшалович Д.А., Москалёв А.Н., Херсонский В.К.** Квантовая теория углового момента. Л.: «Наука», 1975 – 439 с.
3. **Давыдов А.С.** Квантовая механика. М.: «Наука», 1973 – 704 с.
4. **Князьков О.М.** Лекции по теории ядерных реакций. СПб.: Издательство ПИЯФ РАН, 2004 – 119 с.
5. **Мессиа А.** Квантовая механика, т.2. М.: Главная редакция физико-математической литературы, 1979 – 584 с.
6. **Таулес Д.** Квантовая механика систем многих частиц. М.: «Мир», 1975 – 380 с.
7. **Ring P., Schuck P.** The Nuclear Many-Body Problem. N.Y.: Springer-Verlag, 1980 – 716 p.
8. **Heyde K.L.G.** The Nuclear Shell Model. Berlin: Springer-Verlag, 1990 – 376 p.