А. К. Пономаренко, В. Ю. Сахаров,
Т. В. Степанова, П. К. Черняев

УЧЕБНЫЕ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

С.-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А. К. ПОНОМАРЕНКО, В. Ю. САХАРОВ,
Т. В. СТЕПАНОВА, П. К. ЧЕРНЯЕВ

УЧЕБНЫЕ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Учебное пособие

ИЗДАТЕЛЬСТВО С.-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2000

УДК 517.9:(0.75.8)
ББК 22.16
П90

Рецензенты: докт. физ.-мат. наук, зав. каф., проф. С. А. Назаров (Гос. морск. акад. им. адм. С. О. Макарова), докт. физ.-мат. наук, проф. А. В. Проскура (Гос. морск. техн. ун-т).

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
С.-Петербургского государственного университета

Пономаренко А. К., Сахаров В. Ю.,
Степанова Т. В., Черняев П. К.

П90 **Учебные и контрольные задания по обыкновенным дифференциальным уравнениям:** Учеб. пособие. — СПб.: Издательство С.-Петербургского университета, 2000. — 228 с.
ISBN 5-288-02291-7

Цель данного учебного пособия — вызвать интерес у студентов к методам и теории дифференциальных уравнений в различных областях знаний. В задачник вошли теоретические сведения и задачи по дифференциальным уравнениям первого, второго и высших порядков, линейным уравнениям с постоянными коэффициентами и линейным системам, автономным системам и исследованию устойчивости положения равновесия. Значительное место занимает построение дифференциальных уравнений для конкретных задач биологии, географии экологии и экономики. Типовые задачи даются с решениями и иллюстрациями.

Книга предназначена для студентов нематематических факультетов университетов и технических вузов.

Библиогр. 27 назв. Табл. 5. Ил. 86.

Тем. план 1999 г., № 102

ББК 22.16

ISBN 5-288-02291-7

Предисловие

Главная цель данного издания — вызвать интерес у студентов к методам и теории дифференциальных уравнений, затем оказать определенную помощь в удовлетворении возникшего интереса, а также показать возможные приложения дифференциальных уравнений в различных областях знания.

Пособие составлено для студентов и преподавателей нематематических факультетов университета, изучение математики на которых происходит в сокращенном объеме. В нем представлены задачи и теоретические сведения по дифференциальным уравнениям первого, второго и высших порядков, линейным уравнениям с постоянными коэффициентами и линейным системам, автономным системам и исследованию устойчивости положений равновесия. Значительное внимание уделяется построению дифференциальных уравнений для конкретных задач из области биологии, географии, химии, экологии и экономики. Изложены основные численные методы приближенного решения задачи Коши (начальной) и краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Необходимые теоретические сведения приводятся в каждом параграфе. Типовые задачи даются с решениями и иллюстрациями. Учебные задания с ответами и указаниями подобраны с учетом особенностей разных специальностей.

Основное отличие от имеющихся сборников задач по дифференциальным уравнениям заключается в наличии контрольных заданий по большинству изложенных тем. Контрольные задания, содержащие 30 вариантов, могут быть использованы для проведения контрольных работ как аудиторных, так и домашних. Проведение домашних контрольных работ, как показывает опыт авторов, особенно при обучении по учебным планам с небольшим количеством часов, отводимых на курс дифференциальных уравнений (или на соответствующий раздел курсов "Высшая математика" и "Математический анализ"), способствует активному усвоению материала и возникновению вкуса к исследовательской работе.

При написании пособия были использованы задачи из известных сборников, указанных в списке литературы, но большинство задач составлены авторами.

Все определяемые понятия и формулировки теорем выделены курсивом. Окончания примеров обозначены символом $\square$.

Задачник может быть полезен также студентам вечернего и заочного отделений университетов, лицам, самостоятельно изучающим дифференциальные уравнения, и специалистам нематематических профессий, использующих дифференциальные уравнения в своей работе.

Авторы выражают глубокую признательность доктору физико–математических наук, профессору, заведующему кафедрой гидроупругости Санкт–Петербургского государственного университета Борису Александровичу Ершову за содержательные идеи, советы и замечания, способствовавшие улучшению учебного пособия. Кроме того, авторы благодарят кандидата физико–математических наук, доцента кафедры дифференциальных уравнений Санкт–Петербургского государственного университета Александра Васильевича Осипова за внимательное прочтение рукописи и ряд ценных указаний в отношении изложения.

§1. Основные понятия и определения

Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее производные или дифференциалы неизвестной функции. Если искомая функция $y = y(x)$ — функция одной переменной x, то уравнение называется *обыкновенным дифференциальным уравнением.* Если же уравнение содержит частные производные (неизвестная функция является функцией нескольких переменных), то его называют *дифференциальным уравнением с частными производными.* А если в качестве неизвестной функции выступает вектор-функция, то соответствующее уравнение фактически задает *систему дифференциальных уравнений.*

Например: 1) $\frac{dy}{dx} + x^2 y = 0$, 2) $(y''')^2 + y' = x \sin x$,
3) $\left(x^2 y^2 - 1\right) dx + 2xy^3 dy = 0$, 4) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$,
5) $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{y} + \mathbf{f}(t)$, где $\mathbf{y}(t), \mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^n$ при фиксированных значениях t, $\mathbf{A}$ — матрица размером $n \times n$.

В первых трех примерах искомой является функция $y = y(x)$ — это обыкновенные дифференциальные уравнения. В четвертом примере неизвестное — функция $u = u(x, y, z)$. Это уравнение с частными производными. В пятом примере уравнение задает систему n дифференциальных уравнений.

В данном пособии будут рассматриваться только обыкновенные дифференциальные уравнения и системы из них.

Наивысший порядок производных (дифференциалов) неизвестной функции, входящих в уравнение, называется *порядком дифференциального уравнения.* Так, 1), 3) — примеры обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, в примере 2) приведено дифференциальное уравнение третьего порядка.

Пусть x — независимая вещественная переменная и $y = y(x)$ — искомая вещественная функция этой переменной. Общий вид дифференциального уравнения n-го порядка таков:

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{1}$$

Решением дифференциального уравнения (1) называется функция $y = \varphi(x)$, определенная на промежутке $\langle a, b\rangle$*, $a < b$, вместе

* Знаки $\langle$ и $\rangle$ обозначают как включение, так и исключение соответствующего конца промежутка, т. е. промежуток $\langle a, b\rangle$ может быть любым из четырех возможных.

со своими производными до n-го порядка включительно и такая, что подстановка этой функции $y = \varphi(x)$ в уравнение (1) обращает его в тождество относительно x на $\langle a, b\rangle$, т. е. для любого $x \in \langle a, b\rangle$ выполняется равенство

$$F\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\right) = 0.$$

В этом определении величины a и b могут принимать и несобственные значения $-\infty$ и $+\infty$ соответственно.

Пример 1. Проверить что функция $y = \sin x + \cos x$ является решением уравнения $y'' + y = 0$ на интервале $(-\infty, +\infty)$.

Р е ш е н и е. Дифференцируя функцию $y = \sin x + \cos x$ дважды, получаем

$$y' = \cos x - \sin x, \quad y'' = -\sin x - \cos x.$$

Подставляя выражения y и y'' в исходное дифференциальное уравнение, имеем

$$-\sin x - \cos x + \sin x + \cos x = 0$$

для любого x из интервала $(-\infty, +\infty)$. Это и доказывает, что функция $y = \sin x + \cos x$ есть решение дифференциального уравнения $y'' + y = 0$. $\square$

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется интегрированием дифференциального уравнения.

График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой* этого уравнения.

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид: в общей форме

$$F(x, y, y') = 0, \tag{2}$$

в нормальной форме

$$y' = f(x, y), \tag{3}$$

где производная может быть представлена как отношение дифференциалов:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{4}$$

Так как с точки зрения геометрии координаты x и y равноправны, то наряду с уравнением $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ будем рассматривать при $f(x, y) \neq 0$ уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}. \tag{5}$$

Часто встречается и такая запись дифференциального уравнения первого порядка:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0. \tag{6}$$

В простейшем случае, когда правая часть уравнения (3) не содержит y, получается дифференциальное уравнение вида

$$y' = f(x). \tag{7}$$

Вся совокупность решений уравнения (7) дается формулой

$$y = \int\limits_{\bullet} f(x)dx + C, \tag{8}$$

где $\int\limits_{\bullet}$ означает фиксированную первообразную, а C — произвольную постоянную.

Формула (8) задает семейство решений уравнения (7), содержащее произвольную постоянную, и называется *общим решением дифференциального уравнения* (7).

Если $f(x)$ — непрерывная на некотором интервале (a,b) функция и точка $x = x_0$ принадлежит ему, то для любого вещественного значения y_0 можно найти решение уравнения (7), удовлетворяющее *начальному условию*, или *условию Коши**,

$$y(x_0) = y_0, \tag{9}$$

где y_0 — заданное число, а именно

$$y = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt + y_0. \tag{10}$$

Начальной задачей (задачей Коши) для уравнения первого порядка (3) называют задачу нахождения решения $y = y(x)$, удовлетворяющего дополнительно начальному условию $y(x_0) = y_0$ $\big($другая запись $y\big|_{x=x_0} = y_0\big)$.

* О.Л. Коши (A.L. Cauchy, 1789—1857) — французский математик.

Геометрически это означает, что ищется интегральная кривая, проходящая через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ плоскости Oxy.

1. Теорема существования и единственности решения начальной задачи. *Пусть дано дифференциальное уравнение* $y' = f(x, y)$, *где функция* $f(x, y)$ *определена в некоторой области* D *плоскости* Oxy, *содержащей точку* (x_0, y_0). *Если функция* $f(x, y)$ *удовлетворяет условиям:*

а) $f(x, y)$ *есть непрерывная функция двух переменных* x *и* y *в области* D;

б) $f(x, y)$ *имеет частную производную* $\frac{\partial f}{\partial y}$, *ограниченную в области* D,

то найдется интервал $(x_0 - h, x_0 + h)$, *на котором существует единственное решение* $y = \varphi(x)$ *данного уравнения, удовлетворяющее условию* $\varphi(x_0) = y_0$ (теорема доказана в монографии [4]).

Теорема дает достаточные условия существования единственного решения начальной задачи для уравнения $y' = f(x, y)$, но эти условия не являются необходимыми [7].

Общим решением дифференциального уравнения (3) называется функция

$$y = \varphi(x, C), \tag{11}$$

зависящая от одной произвольной постоянной C и такая, что: 1) она удовлетворяет уравнению (3) при любых допустимых значениях переменной C; 2) каково бы ни было начальное условие (9), можно подобрать такое значение C_0 постоянной C, что решение $y = \varphi(x, C_0)$ будет удовлетворять заданному условию (9), т. е. $\varphi(x_0, C_0) = y_0$. При этом предполагается, что точка (x_0, y_0) принадлежит области, где выполняются условия существования и единственности решения.

Частным решением дифференциального уравнения (3) называется решение, полученное из общего решения (11) при каком-либо определенном значении произвольной постоянной C (включая и $C = +\infty$, $C = -\infty$).

Геометрическая интерпретация этого определения состоит в том, что общее решение (11) определяет, как и общее решение (8) в случае уравнения (7), семейство интегральных кривых уравнения (3). Такое семейство может определяться и уравнением, задающим неявную функцию, вида

$$\Phi(x, y, C) = 0 \quad \text{или, в частности,} \quad \psi(x, y) = C, \tag{12}$$

т. е. *общим интегралом** дифференциального уравнения.

Пример 2. Проверить, что функция $y = Ce^{-x}$ есть общее решение уравнения $y' + y = 0$, и найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y\big|_{x=0} = 2$.

Р е ш е н и е. Имеем $y' = -Ce^{-x}$. Подставляя в данное уравнение выражения y и y', получаем $-Ce^{-x} + Ce^{-x} \equiv 0$, т. е. функция $y = Ce^{-x}$ является решением данного уравнения при любых значениях постоянной C.

Зададим произвольное начальное условие $y\big|_{x=x_0} = y_0$. Подставив x_0 и y_0 вместо x и y в функцию $y = Ce^{-x}$, будем иметь $C = y_0 e^{x_0}$. Следовательно, функция $y = y_0 e^{x_0 - x}$ удовлетворяет начальному условию, а функция $y = Ce^{-x}$ есть общее решение данного уравнения.

При $x_0 = 0, \quad y_0 = 2$ находим частное решение $y = 2e^{-x}$.

y

2 M_0

O x

Рис. 1.

Полученное общее решение определяет семейство интегральных кривых, которыми являются графики показательных функций (рис. 1, $y = 0$ — тоже интегральная кривая!). Искомое част-

---

* Общее решение — частный случай общего интеграла.

ное решение есть интегральная кривая, проходящая через точку $M_0(0,2)$. $\square$

Пример 3. Составить дифференциальное уравнение семейства кривых

$$x^2 + Cy^2 = 2y. \tag{13}$$

Р е ш е н и е. Дифференцируем уравнение (13) по x, считая y функцией от x:

$$2x + 2Cyy' = 2y',$$

а затем из полученного уравнения и уравнения (13) исключаем произвольную постоянную C:

$$C = \frac{2y - x^2}{y^2} \quad \Rightarrow \quad 2x + 2y\frac{2y - x^2}{y^2}y' = 2y' \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad xy + \left(2y - x^2\right) y' = yy' \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(y - x^2\right) y' + xy = 0. \tag{14}$$

Одновременно показано, что алгебраическое уравнение (13) является общим интегралом дифференциального уравнения (14). $\square$

Не следует думать, что решение дифференциального уравнения может быть представлено только одним равенством $\Phi(x, y, C) = 0$. Дифференциальное уравнение аналогично недифференциальному может иметь несколько вариантов решений. Причем, как показывает следующий пример, для дифференциального уравнения, в отличие от недифференциального, возможны решения, являющиеся комбинацией полученных других решений.

Пример 4. Решить дифференциальное уравнение

$$y'\left(y' - 2x\right) = 0.$$

Р е ш е н и е.

$$y'\left(y' - 2x\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} & y' = 0, \\ & y' = 2x. \end{aligned}\right.$$

Соотношение $y' = 0$ означает, что

$$y = C, \quad C = \text{const},$$

является решением, а из соотношения $y' = 2x$ следует, что второе решение имеет вид

$$y = x^2 + C.$$

Однако существуют и другие решения этого дифференциального уравнения:

$$y = \begin{cases} C, & \text{если } x \leqslant 0, \\ x^2 + C, & \text{если } x > 0, \end{cases}$$

и

$$y = \begin{cases} x^2 + C, & \text{если } x \leqslant 0, \\ C, & \text{если } x > 0, \end{cases}$$

поскольку, во-первых, указанные функции удовлетворяют дифференциальному уравнению, а во-вторых, при $x = 0$ функции $y = C$ и $y = x^2 + C$ имеют равные производные и, следовательно, решения составленные из них, дифференцируемы. □

В задачах 1—5 составить дифференциальные уравнения данных семейств линий:

1. $y = Cx^3$.
2. $y = \sin(x + C)$.
3. $y(y - 2x)^3 = C(y - x)^2$.
4. $x + y - 1 = Ce^{\frac{2x+2}{x+y-1}}$.
5. $y = Cx - C - C^2$.

§2. Поле направлений, изоклины

Решение уравнения (3), которому соответствует интегральная кривая, проходящая через точку (x, y), должно иметь в точке x производную $y' = f(x, y)$, т. е. эта интегральная кривая должна касаться прямой, наклоненной под углом $\alpha = \operatorname{arctg} f(x, y)$ к оси Ox (рис. 2).

Следовательно, *направление касательных к интегральным кривым задается самим дифференциальным уравнением.*

Проведя в каждой точке (x, y) из области задания функции $f(x, y)$ отрезок с центром в этой точке, образующий с положительным направлением оси Ox угол α, где $\operatorname{tg} \alpha = f(x, y)$, получим так называемое *поле направлений.* На рис. 3 показано поле направлений уравнения $y' = x - y^2$.

Если в точке (x_0, y_0) правая часть дифференциального уравнения (3) обращается в бесконечность, то в этой точке направление поля параллельно оси Oy. В этом случае можно рассматривать "перевернутое" дифференциальное уравнение (5).

y $y = \varphi(x)$ y

y M O x

α

O x x

Рис. 2. Рис. 3.

Множество точек плоскости (x, y), в которых наклон касательных к решениям дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ один и тот же, называется изоклиной. Уравнение изоклины имеет вид $f(x, y) = k$, где k — постоянная.

Чтобы приближенно построить решение уравнения (3), можно начертить достаточное число изоклин, а затем провести кривые, которые в точках пересечения с изоклинами $f(x, y) = k_1$, $f(x, y) = k_2, \ldots$ имеют касательные с угловыми коэффициентами $k_1, k_2, \ldots$ соответственно.

Пример 5. С помощью изоклин построить приближенно интегральные кривые дифференциального уравнения

$$y' = y - x^2. \tag{15}$$

Р е ш е н и е. Для получения уравнения изоклин положим $y' = k$, $\quad k = \mathrm{const}$. Имеем

$$y - x^2 = k \quad \Leftrightarrow \quad y = x^2 + k.$$

Таким образом, изоклинами являются параболы, для которых ось Oy является осью симметрии. Среди изоклин отсутствуют интегральные кривые, так как если подставить в уравнение (15) $y = x^2 + k$ и $y' = 2x$, то будем иметь

$$2x = x^2 + k - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = k.$$

Но последнее равенство ни при каком значении k не может выполняться тождественно относительно x.

Пусть $k = 0$. Тогда в точках пересечения с изоклиной $y = x^2$ интегральные кривые будут иметь горизонтальные касательные. Изоклина, определяемая условием $k = 0$, т. е. парабола $y = x^2$, разбивает плоскость Oxy на две части: в одной из них $y' > 0$ (решения y возрастают), а в другой $y' < 0$ (решения y убывают). А так как эта изоклина не является интегральной кривой, то на ней находятся точки экстремумов интегральных кривых, а именно: на той части параболы $y = x^2$, где $x < 0$, — точки минимума, и на другой части этой параболы, где $x > 0$, — точки максимума (тип экстремума определяется по близлежащим изоклинам).

В точках изоклин, определяемых равенствами $k = 1$, т. е. $y = x^2 + 1$, и $k = -1$, т. е. $y = x^2 - 1$, касательные к интегральным кривым имеют угловые коэффициенты, равные 1 и (-1) соответственно.

Для исследования направления вогнутости интегральных кривых найдем вторую производную. Имеем

$$y'' = \left(y - x^2\right)' = y' - 2x = y - x^2 - 2x.$$

Эта производная обращается в нуль только в точках, лежащих на параболе $y = x^2 + 2x$. В точках плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют условию $y < x^2 + 2x$, интегральные кривые выпуклы $(y'' < 0)$, а в точках, где $y > x^2$, они вогнуты $(y'' > 0)$. Точки пересечения интегральных кривых с параболой $y = x^2 + 2x$ являются точками перегиба этих кривых. В частности, интегральная кривая, проходящая через точку $(0, 0)$, т. е. через вершину параболы $y = x^2$, в этой точке не имеет экстремума, так как точка $(0, 0)$ лежит и на параболе $y = x^2 + 2x$.

Правая часть $f(x, y) = y - x^2$ исходного уравнения во всех точках плоскости Oxy удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности, поэтому через каждую точку плоскости проходит единственная интегральная кривая дифференциального уравнения.

Полученные данные позволяют приближенно построить семейство интегральных кривых данного уравнения. На рис. 4 (§ 5) отмечены касательные к интегральным кривым в точках пересечения с изоклинами, соответствующими $k = -2$, -1, 0, 1, 2. Сравните этот рисунок с рис. 6, на котором непосредственно показаны интегральные кривые, полученные в примере 9 с помощью общего решения. $\square$

y

2

1

0

O x

-1

$k = -2$

Рис. 4.

В задачах 6—10 с помощью изоклин построить приближенно интегральные кривые следующих дифференциальных уравнений:

6. $y' = x + y$.

7. $y' = \dfrac{y}{x}$.

8. $y' = \cos(x - y)$.

9. $y' = x^2 + 2x - y$.

10. $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

§3. Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальные уравнения с разделяющимися (отделяющимися) переменными* могут быть записаны в виде

$$y' = f(x)g(y), \tag{16}$$

а также в виде

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0. \tag{17}$$

Умножая уравнение (16) на $\frac{dx}{g(y)}$, а уравнение (17) — на $\frac{1}{M_2(y)N_1(x)}$, получаем дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx, \quad \text{или} \quad \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = 0, \tag{18}$$

так что коэффициент при dx будет зависеть только от x, а коэффициент при dy — только от y.

Оба уравнения (18) называются *дифференциальными уравнениями с разделенными переменными*, а способ приведения уравнений (16) и (17) к виду (18) называется *разделением (отделением) переменных*. Общим интегралом дифференциального уравнения (17) (а также (18)) является равенство

$$\int_{\bullet} \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \int_{\bullet} \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = C, \tag{19}$$

где C — произвольная постоянная.

Если в уравнении (19) выполним квадратуры (т. е. вычислим интегралы) и решим его относительно y, то получим уравнение семейства интегральных кривых в явной форме (общее решение)

$$y = \varphi(x, C).$$

---

* В современной литературе используется термин "с разделяющимися переменными". В классических учебниках, например [3], употреблялся более точный термин — "с отделяющимися переменными".

При делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее x и y, возможна потеря решений, обращающих это выражение в нуль.

Пример 6. Решить дифференциальное уравнение

$$x\,dy = 2y\,dx \tag{20}$$

и выделить решение, удовлетворяющее начальному условию

$$y(1) = 3. \tag{21}$$

y

3

O 1 x

Рис. 5.

Р е ш е н и е. Разделяем переменные, деля обе части на xy:

$$\frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x}\,.$$

Интегрируя, получаем

$$\ln|y| = 2\ln|x| + C_1 \quad \text{или} \quad |y| = e^{C_1}x^2.$$

Если обозначить $C = \pm e^{C_1}$, то последнее уравнение можно записать короче:

$$y = Cx^2. \tag{22}$$

Здесь $C \neq 0$. При делении на xy могли быть потеряны решения $x = 0$ и $y = 0$. Подставляя их в дифференциальное уравнение (20), видим, что они действительно являются решениями уравнения (20). Но оба эти решения содержатся и в формуле (22): второе из них, $y = 0$, получается при $C = 0$ $\big($если кроме $C = \pm e^{C_1}$ допустить еще и значение $C = 0\big)$. Чтобы получить первое, $x = 0$, обе части формулы (22) следует разделить на C и затем положить $C = \infty$.

Решим теперь начальную задачу (20), (21). Положим $x = 1$, $y = 3$ в формуле (22). Тогда $C = 3$, и из (22) следует $y = 3x^2$ (рис. 5). $\square$

Пример 7. Решить дифференциальное уравнение

$$y' = -\frac{2(x+1)y}{x^2}\,.$$

Р е ш е н и е. Разделяем переменные, представляя $y' = \frac{dy}{dx}$ и умножая обе части уравнения на $\frac{dx}{y}$:

$$\frac{dy}{y} = \left(-\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}\right)dx.$$

Интегрируя, получаем

$$\ln|y| = \left(-2\ln|x| + \frac{2}{x}\right) + C_1.$$

После потенцирования имеем

$$y = \frac{Ce^{2/x}}{x^2}\,,$$

где $C = \pm e^{C_1}$. Здесь $C \neq 0$. При делении на y могло быть потеряно решение $y = 0$. Подставляя его в исходное уравнение, видим, что тождественный нуль — действительно решение. Но это решение так же содержится в полученной формуле при $C = 0$. Следовательно, если считать константу C любой, найденное общее решение содержит все решения исходного дифференциального уравнения. $\square$

Решить начальные задачи:
11. $xy\,dx + (x+1)dy = 0; \quad y(-1) = 5.$
12. $\sqrt{y^2+1}\,dx = xy\,dy; \quad y(e) = 0.$
13. $y' + y\operatorname{tg} x = 2\operatorname{tg} x; \quad y(0) = -1.$
14. $y' = y\ln^2 y; \quad y(0) = e.$
15. $\left(y^2 + xy^2\right) y' + x^2 = yx^2; \quad y(0) = 2.$

Контрольное задание №1

В каждом варианте найти общий интеграл дифференциального уравнения:
1.1. $y^2dx - 2xy\,dy = 4y\,dy - dx.$
1.2. $\sqrt{9-y^2}dx - 4\,dy = x^2dy.$
1.3. $y\,dy + \sqrt{y^2+4}\,dx = 2x^2y\,dy.$
1.4. $y^2dx - x\,dy = 2\,dy - 4\,dx.$
1.5. $x^2dy = 2x\sqrt{y^2+4}\,dx - dy.$
1.6. $\sqrt{9-y^2}\,dx - 2\,dy = x\,dy.$
1.7. $2xy^2dx - dy = x^2dy - 8x\,dx.$
1.8. $dy = \sqrt{y^2+4}\,dx - x\,dy.$
1.9. $2x\sqrt{4-y^2}\,dx - dy = x^2dy.$
1.10. $x^2dy = \sqrt{y^2+1}\,dx - 4\,dy.$
1.11. $y^2dx - 2y\,dy = 2xy\,dy - 4\,dx.$
1.12. $9\,dy = \sqrt{4-y^2}\,dx - x^2dy.$
1.13. $2x^2y\,dy = \sqrt{y^2+1}\,dx + 8y\,dy.$
1.14. $9\,dx - x\,dy = dy - y^2dx.$
1.15. $2x\sqrt{y^2+1}\,dx - x^2dy = 4\,dy.$
1.16. $dy = \sqrt{4-y^2}\,dx - x\,dy.$
1.17. $18x\,dx - x^2dy = 4\,dy - 2xy^2dx.$
1.18. $\sqrt{y^2+1}\,dx - 2\,dy = x\,dy.$
1.19. $4\,dy = 2x\sqrt{9-y^2}\,dx - x^2dy.$
1.20. $\sqrt{y^2+4}\,dx - 9\,dy = x^2dy.$
1.21. $dy - 2xy\,dx = 4x\,dx - x^2dy.$
1.22. $4\,dx = \sqrt{9-x^2}\,dy - y^2dx.$
1.23. $2xy^2dx = \sqrt{x^2+4}\,dy + x\,dx.$
1.24. $4\,dy - y\,dx = 2\,dx - x^2dy.$
1.25. $dx = 2y\sqrt{x^2+4}\,dy - y^2dx.$
1.26. $2\,dx = \sqrt{9-x^2}\,dy - y\,dx.$
1.27. $8y\,dy - dx = y^2dx - 2x^2y\,dy.$

1.28. $\sqrt{x^2+4}\,dy - dx = y\,dx$.
1.29. $dx = 2y\sqrt{4-x^2}\,dy - y^2dx$.
1.30. $-y^2dx + \sqrt{x^2+1}\,dy = 4\,dx$.

§4. Однородные уравнения

Однородным дифференциальным уравнением называется уравнение вида

$$y' = f\Big(\frac{y}{x}\Big). \tag{23}$$

К такому виду может быть приведено уравнение (6), если функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ являются однородными функциями одной и той же степени $\big($функция $F(x,y)$ называется *однородной функцией степени* p, если для всех k имеем $F(kx,ky) \equiv k^pF(x,y)$; например, $F(x,y) = x^2+2y^2-xy$ есть однородная функция второй степени$\big)$.

Дифференциальное уравнение (23) будем решать методом *замены переменных*. Именно, вместо неизвестной функции y введем неизвестную функцию z, положив $z = \frac{y}{x}$ *.

Подставляя в уравнение (23) $y = zx$, с учетом того, что по правилу дифференцирования произведения $y' = z'x+x'z = z'x+z$, для новой неизвестной функции z получим дифференциальное уравнение

$$z'x + z = f(z),$$

которое является уравнением с разделяющимися переменными (см. §3).

Пример 8. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$\big(y^2+xy\big)\,dx - x^2dy = 0. \tag{24}$$

Р е ш е н и е. Уравнение является однородным, так как множители при dx и dy — однородные функции второй степени. Делением на x^2dx при $x \neq 0$ преобразуем уравнение (24) в уравнение (23):

$$y' = \Big(\frac{y}{x}\Big)^2 + \frac{y}{x}\,.$$

Полагаем здесь $y = zx$:

$$z'x + z = z^2 + z,$$

* Иногда бывает удобным функцию z ввести так: $z = \frac{x}{y}$.

и разделяем переменные:

$$\frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x}\,.$$

Интегрируя, получаем

$$-\frac{1}{z} = \ln|x| + C.$$

Осталось сделать обратную замену:

$$-\frac{x}{y} = \ln|x| + C \quad \text{или} \quad y = -\frac{x}{\ln|x| + C}\,.$$

Полученные выражения дают общий интеграл и общее решение дифференциального уравнения (24) соответственно. Решение $y \equiv 0$ является частным, так как содержится в последней формуле при $C = \pm\infty$. Кроме того, при $C = +\infty$ может быть получено решение $x = 0$, которое также является частным. $\square$

Найти общий интеграл дифференциальных уравнений:

16. $\left(y^2 - 2xy\right)dx + x^2 dy = 0.$
17. $xy' \sin\left(\frac{y}{x}\right) + x = y \sin\left(\frac{y}{x}\right).$
18. $xy' - y = x \operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right).$
19. $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y.$
20. $y^3 dy + \left(3y^2 x + 2x^3\right)dx = 0.$

Контрольное задание №2

В каждом варианте найти общий интеграл дифференциального уравнения:

2.1. $(2x - y)dy = (4x + 2y)dx.$

2.2. $\left(x^2 + 2xy + 3y^2\right)dx = 2x(x + y)dy.$

2.3. $\left(6y^3 + 2x^2 y\right)dx = \left(5xy^2 + x^3\right)dy.$

2.4. $2xy' = 2y + x \operatorname{tg}\frac{2y}{x}\,.$

2.5. $(x + 3y)dx = (3x - y)dy.$

2.6. $\left(4x^2 + 4xy + 3y^2\right)dx = \left(4x^2 + 2xy\right)dy.$

2.7. $\left(6y^3 + 4x^2 y\right)dx = \left(5xy^2 + 2x^3\right)dy.$

2.8. $xy' = y + (2x+y)\big(\ln(2x+y) - \ln x\big)$.
2.9. $(6x-y)dy = (9x+6y)dx$.
2.10. $\left(2x^2+4xy\right)dy = \left(x^2+2xy+5y^2\right)dx$.
2.11. $6y\left(x^2+y^2\right)dx = \left(5xy^2+3x^3\right)dy$.
2.12. $xy' = \sqrt{9x^2-y^2}+y$.
2.13. $(5x-y)dy = (x+5y)dx$.
2.14. $\left(4x^2+6xy+3y^2\right)dx = \left(6x^2+2xy\right)dy$.
2.15. $2x^2y' = y^2+5xy+2x^2$.
2.16. $(4x+4y)dx = (4x-y)dy$.
2.17. $\left(3x^2+2xy\right)dy = \left(x^2+3xy+3y^2\right)dx$.
2.18. $x\left(3y^2+x^2\right)dy = \left(4y^3+2x^2y\right)dx$.
2.19. $3xy' = 3y + x\,\mathrm{tg}\,\dfrac{3y}{x}$.
2.20. $(6x-y)dy = (x+6y)dx$.
2.21. $\left(4x^2+4xy+5y^2\right)dx = 4x(x+y)dy$.
2.22. $x\left(3y^2+2x^2\right)dy = 4y\left(y^2+x^2\right)dx$.
2.23. $xy' = y + (x+2y)\big(\ln(x+2y) - \ln x\big)$.
2.24. $(9x+3y)dx = (3x-y)dy$.
2.25. $\left(3x^2+4xy\right)dy = \left(x^2+3xy+5y^2\right)dx$.
2.26. $3x\left(y^2+x^2\right)dy = \left(4y^3+6x^2y\right)dx$.
2.27. $xy' = \sqrt{4x^2-y^2}+y$.
2.28. $(4x-y)dy = (x+4y)dx$.
2.29. $\left(4x^2+6xy+5y^2\right)dx = \left(6x^2+4xy\right)dy$.
2.30. $4x^2y' = y^2+9xy+6x^2$.

Контрольное задание №3

В каждом варианте найти общий интеграл дифференциального уравнения (у к а з а н и е: сделать замену неизвестной функции $y(x) = xz(x)$):

3.1. $\left(x^2+4\right)(x\,dy - y\,dx) = x\sqrt{y^2+x^2}dx$.
3.2. $(1+x)(x\,dy - y\,dx) = x\sqrt{y^2+4x^2}\,dx$.
3.3. $\left(9+x^2\right)(x\,dy - y\,dx)x\sqrt{4x^2-y^2}\,dx$.
3.4. $x(2x+y)dx = \sqrt{9-x^2}(x\,dy - y\,dx)$.
3.5. $x\sqrt{9x^2-y^2}\,dx = \left(4+x^2\right)(x\,dy - y\,dx)$.
3.6. $x\sqrt{y^2+4x^2}\,dx = \left(x^2+9\right)(x\,dy - y\,dx)$.
3.7. $(1+x)(x\,dy - y\,dx) = x\sqrt{4x^2-y^2}\,dx$.
3.8. $2x^2\left(4x^2-y^2\right)dx = \left(x^2+1\right)(x\,dy - y\,dx)$.

3.9. $2x^2\sqrt{y^2+x^2}\,dx = \left(4+x^2\right)(x\,dy - y\,dx)$.
3.10. $\left(9x^2+y^2\right)dx = (x+1)(x\,dy - y\,dx)$.
3.11. $\left(4+x^2\right)(x\,dy - y\,dx) = 2x^2\sqrt{9x^2-y^2}$.
3.12. $2x\left(y^2+4x^2\right)dx = \left(x^2+1\right)(x\,dy - y\,dx)$.
3.13. $x^2\sqrt{y^2+4x^2}\,dx = y\left(2x^2-1\right)(x\,dy - y\,dx)$.
3.14. $\left(4x^2+y^2\right)dx = \sqrt{9-x^2}(x\,dy - y\,dx)$.
3.15. $x\left(y^2+4x^2\right)dx = 2y(x+1)(x\,dy - y\,dx)$.
3.16. $\left(4+x^2\right)(x\,dy - y\,dx) = x(2x+y)dx$.
3.17. $\left(1+x^2\right)(x\,dy - y\,dx) = 2x^2(2x+y)dx$.
3.18. $2y\left(x^2-4\right)(x\,dy - y\,dx)x^2\sqrt{y^2+x^2}dx$.
3.19. $x\left(x^2+y^2\right)dx = 2y\sqrt{x^2+4}(x\,dy - y\,dx)$.
3.20. $\sqrt{x^2+1}(x\,dy - y\,dx) = \left(4x^2+y^2\right)dx$.
3.21. $2x\left(x^2+y^2\right)dx = \left(4+x^2\right)(x\,dy - y\,dx)$.
3.22. $\left(1+x^2\right)(x\,dy - y\,dx) = 2x^2\sqrt{y^2+4x^2}\,dx$.
3.23. $x\sqrt{y^2+x^2}\,dx = (x+2)(x\,dy - y\,dx)$.
3.24. $x\left(x^2+y^2\right)dx = 2y\sqrt{4-x^2}(x\,dy - y\,dx)$.
3.25. $x\left(x^2+y^2\right)dx = 2y(x+2)(x\,dy - y\,dx)$.
3.26. $2y\left(4+x^2\right)(x\,dy - y\,dx) = x\left(x^2+y^2\right)dx$.
3.27. $x\sqrt{9x^2-y^2}\,dx = (x+2)(x\,dy - y\,dx)$.
3.28. $\left(y^2+4x^2\right)dx = (x+2)(x\,dy - y\,dx)$.
3.29. $\sqrt{x^2+4}(x\,dy - y\,dx) = x(x+y)dx$.
3.30. $x\left(2y^2-x^2\right)dx = \sqrt{x^2+4}(x\,dy - y\,dx)$.

§5. Линейные уравнения и уравнения Бернулли

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{25}$$

$p(x)$, $q(x)$ — заданные непрерывные функции.

Для общего решения линейного дифференциального уравнения существует формула

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}\,dx\right). \qquad (26)$$

Если задано начальное значение y_0 искомого решения при $x = x_0$, т. е. $y(x_0) = y_0$, то решение начальной задачи дается формулой

$$y = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(t)dt}\left(y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} q(u)e^{\int\limits_{x_0}^{u} p(t)dt}\,du\right).$$

Линейное дифференциальное уравнение (25) также может быть проинтегрировано *методом Бернулли** (см. пример 10).

Обобщением линейного дифференциального уравнения (25) является *уравнение Бернулли***

$$y' + p(x)y = q(x)y^m, \qquad (27)$$

причем показатель степени m можно считать отличным от нуля и единицы, так как в этих случаях уравнение будет линейным. При $m > 0$ уравнение (27) имеет решение $y = 0$. Если $y \neq 0$, разделим обе части уравнения на y^m:

$$y^{-m}y' + p(x)y^{1-m} = q(x)$$

и введем вместо y новую искомую функцию z:

$$z = y^{1-m}.$$

Так как $z' = (1-m)y^{-m}y'$, уравнение преобразовывается в уравнение вида

$$z' + p_1(x)z = q_1(x),$$

где $p_1(x) = (1-m)p(x)$ и $q_1(x) = (1-m)q(x)$, т. е. в уравнение вида (25).

На практике такое преобразование не обязательно (см. пример 11).

Пример 9. Найти общее решение и построить интегральные кривые дифференциального уравнения

$$y' - y = -x^2.$$

---

* И. Бернулли (I. Bernoulli, 1667—1748) — швейцарский математик.

** Я. Бернулли (J. Bernoulli, 1654—1705) — швейцарский математик.

Р е ш е н и е. Воспользуемся готовой формулой (26). При этом

$$p(x) = -1, \quad q(x) = -x^2, \quad \int p(x)dx = -x, \quad e^{\int p(x)dx} = e^{-x},$$

$$\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx = \int -x^2e^{-x}dx =$$

$$= -x^2\left(-e^{-x}\right) - \int -e^{-x}(-2x)dx = x^2e^{-x} - \int 2xe^{-x}dx =$$

$$= x^2e^{-x} - \left(-2xe^{-x} + \int 2e^{-x}dx\right) =$$

$$= x^2e^{-x} + 2xe^{-x} - 2\int e^{-x}dx = e^{-x}\left(x^2+2x+2\right)$$

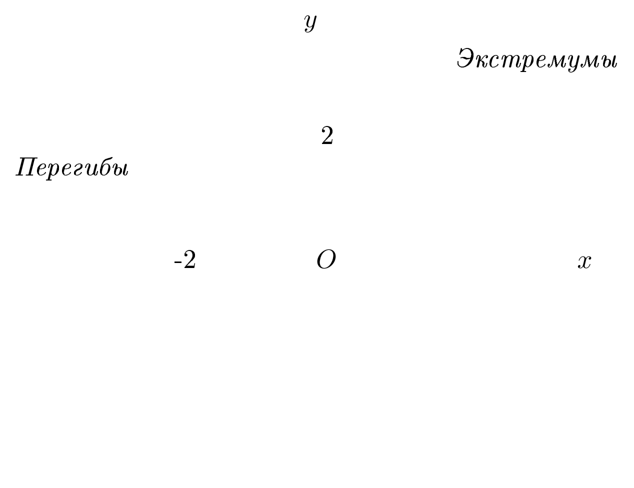

Рис. 6.

(при первом интегрировании по частям $u = -x^2$, $dv = e^{-x}dx$, $du = -2x\,dx$, $v = -e^{-x}$, при повторном интегрировании по частям $u = 2x$, $dv = e^{-x}dx$, $du = 2\,dx$, $v = -e^{-x}$). При вычислении неопределенных интегралов нигде не ставилась постоянная интегрирования. В ней нет необходимости, так как она уже присутствует в формуле (26). Окончательно имеем

$$y = e^x \left(C + e^{-x}\left(x^2 + 2x + 2\right)\right) = Ce^x + x^2 + 2x + 2.$$

Интегральные кривые изображены на рис. 6. Данное дифференциальное уравнение уже рассматривалось в примере 5. Там было показано, как, не решая дифференциальное уравнение получить формулы линий из экстремумов и перегибов семейства решений. На рис. 6 выделена еще одна линия. Это график решения, отделяющего части координатной плоскости, заполняемые графиками решений с точкой перегиба (ниже выделенной линии) и без точки перегиба (выше). $\square$

Пример 10. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' + 2xy = 2xe^{-x^2}. \tag{28}$$

Р е ш е н и е. Можно было бы использовать формулу (26), и решение свелось бы к нахождению двух квадратур. Однако возможно применить *метод Бернулли*, позволяющий обойтись без запоминания формулы (26), которую также можно получить методом Бернулли.

С помощью замены неизвестной функции $y = u(x)v(x)$, где $u(x)$, $v(x)$ — две новые неизвестные функции, уравнение (28) преобразуем в уравнение вида

$$u'v + uv' + 2xuv = 2xe^{-x^2}. \tag{29}$$

Пользуясь тем, что одна из неизвестных функций (например, v) может быть выбрана совершенно произвольно (поскольку лишь произведение uv должно удовлетворять исходному уравнению), за v примем *какое-нибудь* частное решение дифференциального уравнения

$$v' + 2xv = 0. \tag{30}$$

Так как второе и третье слагаемые в уравнении (29) при этом исчезают, для функции u имеем дифференциальное уравнение

$$u'v = 2xe^{-x^2}. \tag{31}$$

Уравнение (30) интегрируем способом, рассмотренным в §3:

$$\frac{dv}{v} + 2x\,dx = 0$$

и, следовательно

$$\ln|v| + x^2 = C_1.$$

Здесь можно положить $C_1 = 0$ и взять решение $v = e^{-x^2}$. Далее подставляем найденное $v(x)$ в уравнение (31):

$$u' = 2x,$$

и находим

$$u = x^2 + C.$$

Окончательно, применяя замену неизвестной функции, получаем общее решение дифференциального уравнения (28):

$$y = \left(x^2 + C\right) e^{-x^2} \quad . \quad \square$$

Пример 11. Решить дифференциальное уравнение

$$xy' + y = y^2 \ln x. \tag{32}$$

Р е ш е н и е. Делением на $x > 0$ (это область определения дифференциального уравнения, и, следовательно, при таком делении никакие решения не теряются) уравнение приводится к дифференциальному уравнению Бернулли (27). Проинтегрируем его методом Бернулли. Положим $y = u(x)v(x)$ и подставим в уравнение, сгруппировав члены, содержащие функцию $u(x)$ в первой степени:

$$xvu' + u\,(xv' + v) = u^2v^2 \ln x.$$

Примем за v какое-либо частное решение уравнения

$$xv' + v = 0,$$

например, $v = \frac{1}{x}$ (см. §3).

Для нахождения функции $u(x)$ имеем дифференциальное уравнение

$$u' = u^2 \frac{\ln x}{x^2} \quad \text{или} \quad \frac{du}{u^2} = \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

Интегрируя, получаем

$$-\frac{1}{u} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} - C, \quad \text{или} \quad u = \frac{x}{1+\ln x + Cx}\,.$$

Таким образом,

$$y = uv = \frac{x}{x\,(1+\ln x + Cx)} = \frac{1}{1+\ln x + Cx}$$

есть общее решение дифференциального уравнения (32). $\square$

Решить дифференциальные уравнения:
21. $xy' - 2y = 2x^4$.
22. $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}$.
23. $\left(1+x^2\right)y' + y = \operatorname{arctg} x$.
24. $\left(x+y^2\right)dy = y\,dx$.
25. $2\left(y^3 - y + xy\right)y' = 1$.
26. $y' + 2y = y^2e^x$.
27. $xy^2y' = x^2 + y^3$.
28. $\left(2x^2y\ln y - x\right)y' = y$.
29. $y' = y^4\cos x + y\operatorname{tg} x$.
30. $\left(1+x^2\right)y' - 2xy = 4\sqrt{y\,(1+x^2)}\operatorname{arctg} x$.

Контрольное задание №4

В каждом варианте найти решение задачи с начальным условием:
4.1. $y' - \dfrac{1}{x}y = xe^x, \quad y(1) = e.$
4.2. $y' - \operatorname{ctg} x \cdot y = \sin x \cdot \cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$
4.3. $y' - \dfrac{4}{x}y = x^4\cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^4}{16}\,.$
4.4. $y' - \dfrac{1}{x\ln x}y = \dfrac{\ln x}{x}\,, \quad y(e) = 0.$
4.5. $y' - \dfrac{1}{2\sqrt{9-x^2}\arcsin\frac{x}{3}}y = \dfrac{1}{2\sqrt{9-x^2}}\,, \quad y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$
4.6. $y' - \dfrac{1}{x}y = 2xe^{2x}, \quad y(1) = e^2.$
4.7. $y' - 3\operatorname{tg} x \cdot y = 3\operatorname{tg}^2 x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$
4.8. $y' - \dfrac{3}{x}y = x^3\cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^3}{8}\,.$

4.9. $y' - \dfrac{1}{x\ln x}y = \dfrac{2\ln^2 x}{x}\,, \quad y(e) = 0.$

4.10. $y' - \dfrac{1}{2\sqrt{16-x^2}\arcsin\frac{x}{4}}y = \dfrac{1}{2\sqrt{16-x^2}}\,, \quad y(2) = \frac{\pi}{3}.$

4.11. $y' - \dfrac{1}{x}y = 3xe^{3x}, \quad y(1) = e^3.$

4.12. $y' - \operatorname{ctg} x \cdot y = 2\sin^2 x \cdot \cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$

4.13. $y' - \dfrac{1}{x}y = x, \quad y(1) = 1.$

4.14. $y' - \dfrac{1}{x\ln x}y = \dfrac{3}{x}\,, \quad y(e) = 0.$

4.15. $y' - \dfrac{1}{2\,(1+x^2)\operatorname{arctg} x}y = \dfrac{1}{2\,(1+x^2)}\,, \quad y(1) = \frac{\pi}{4}\,.$

4.16. $y' - \dfrac{1}{x}y = x^2e^x, \quad y(1) = e.$

4.17. $y' - \operatorname{ctg} x \cdot y = 3\sin^3 x \cdot \cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$

4.18. $y' - \dfrac{2}{x}y = x^2\cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}\,.$

4.19. $y' - \dfrac{1}{x\ln x}y = \dfrac{4\ln^4 x}{x}\,, \quad y(e) = 0.$

4.20. $y' - \dfrac{1}{(4+x^2)\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}y = \dfrac{1}{4+x^2}\,, \quad y(2) = \frac{\pi}{4}\,.$

4.21. $y' - \dfrac{1}{x}y = 2x^2e^{2x}, \quad y(1) = e^2.$

4.22. $y' - 2\operatorname{tg} x \cdot y = 2\operatorname{tg} x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$

4.23. $y' - \dfrac{1}{x}y = x\cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\,.$

4.24. $y' - \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}\arcsin x}y = \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\,, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}\,.$

4.25. $y' - \dfrac{3}{2\,(9+x^2)\operatorname{arctg}\frac{x}{3}}y = \dfrac{3}{2\,(9+x^2)}\,, \quad y(3) = \frac{\pi}{4}\,.$

4.26. $y' - \dfrac{1}{x}y = 3x^2e^{3x}, \quad y(1) = e^3.$

4.27. $y' - \operatorname{ctg} x \cdot y = 4\sin^4 x \cdot \cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$

4.28. $y' - \dfrac{1}{x}y = 2x^2, \quad y(1) = 1.$

4.29. $y' - \dfrac{1}{2\sqrt{4-x^2}\arcsin\frac{x}{2}}y = \dfrac{1}{2\sqrt{4-x^2}}\,, \quad y(1) = \frac{\pi}{3}\,.$

4.30. $y' - \dfrac{2}{(16+x^2)\operatorname{arctg}\frac{x}{4}}y = \dfrac{2}{16+x^2}\,, \quad y(4) = \frac{\pi}{4}\,.$

Контрольное задание №5

В каждом варианте найти общее решение дифференциального уравнения Бернулли:

5.1. $y' - y \operatorname{tg} x = y^{-2} \operatorname{tg}^2 x$.
5.2. $xy' - y = x^3 e^{2x} y^{-1}$.
5.3. $y' \operatorname{tg} x - y = y^{-1} \sin^4 x$.
5.4. $xy' - 4y = x^{-3} y \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{cosec} x$.
5.5. $y' x \ln x - y = y^{-1} \ln^4 x$.
5.6. $y' - 2y \operatorname{tg} x = 2y^{-2} \operatorname{tg}^5 x$.
5.7. $xy' - y = 2x^3 e^{4x} y^{-1}$.
5.8. $y' - 3y \operatorname{tg} x = 3y^3 \operatorname{ctg}^7 x$.
5.9. $xy' - 3y = x^{-2} y^2 \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{cosec} x$.
5.10. $y' x \ln x - y = 2y^{-1} \ln^6 x$.
5.11. $y' - 3y \operatorname{tg} x = 3y^{-2} \operatorname{tg}^8 x$.
5.12. $xy' - y = 3x^3 e^{6x} y^{-1}$.
5.13. $y' \operatorname{tg} x - y = 2y^{-1} \sin^6 x$.
5.14. $xy' - y = x^6 y^{-2}$.
5.15. $y' x \ln x - y = 3y^{-1} \ln^8 x$.
5.16. $y' - 5y \operatorname{tg} x = 5y^3 \operatorname{ctg}^{11} x$.
5.17. $xy' - y = x^5 e^{2x} y^{-1}$.
5.18. $y' \operatorname{tg} x - y = 3y^{-1} \sin^8 x$.
5.19. $xy' - 2y = x^{-1} y^2 \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{cosec} x$.
5.20. $y' x \ln x - y = 4y^{-1} \ln^{10} x$.
5.21. $y' - 4y \operatorname{tg} x = 4y^2 \operatorname{ctg}^5 x$.
5.22. $xy' - y = 2x^5 e^{4x} y^{-1}$.
5.23. $y' - 2y \operatorname{tg} x = 2y^3 \operatorname{ctg}^5 x$.
5.24. $xy' - y = y^2 \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{cosec} x$.
5.25. $y' x \ln x - y = 5y^2 \ln^{-6} x$.
5.26. $y' - y \operatorname{tg} x = y^3 \operatorname{ctg}^3 x$.
5.27. $xy' - y = 3x^5 e^{6x} y^{-1}$.
5.28. $y' \operatorname{tg} x - y = 4y^{-1} \sin^{10} x$.
5.29. $xy' - y = 2x^9 y^{-2}$.
5.30. $y' x \ln x - y = 6y^2 \ln^{-7} x$.

§6. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{33}$$

называется уравнением полного дифференциала (или уравнением в полных дифференциалах), если его левая часть равна полному дифференциалу от некоторой функции $u(x, y)$, т. е. равна $u'_x\,dx + u'_y dy = du$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы функции M'_y и N'_x были непрерывными в рассматриваемой области и выполнялось тождество

$$M'_y \equiv N'_x. \tag{34}$$

Тогда равенство $u(x, y) = C$ дает общий интеграл уравнения полного дифференциала (33).

Для нахождения функции $u(x, y)$ следует проинтегрировать по x равенство $u'_x = M$, взяв вместо произвольной постоянной любую функцию от y, т. е. $u(x, y) = \int M(x, y)dx + \varphi(y)$, а затем найти $\varphi(y)$ из условия $u'_y = N$ (см. пример 12).

Кроме того, если использовать понятие криволинейного интеграла, то функцию $u(x, y)$ можно найти по формуле:

$$u(x, y) = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} du = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} M(x, y)dx + N(x, y)dy, \tag{35}$$

где (x_0, y_0) — фиксированная точка, (x, y) — произвольная точка на плоскости Oxy, а путь, соединяющий точки (x_0, y_0) и (x, y), может быть любым [3, т. II]. Формула (35) может быть записана и через определенные интегралы, например, таким образом [8]:

$$u(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} M(t, y_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y} N(x, z)dz. \tag{36}$$

Очень часто удается и непосредственно угадать выражение для $u(x, y)$.

Пример 12. Решить уравнение

$$\left(2xy + 3x^2\right) dx + \left(x^2 - 5y^4\right) dy = 0. \tag{37}$$

Р е ш е н и е. Проверим выполнение равенства (34):

$$\left(2xy + 3x^2\right)'_y = 2x = \left(x^2 - 5y^4\right)'_x.$$

Следовательно, уравнение (37) является уравнением полного дифференциала.

Способ 1. Найдем функцию $u(x,y)$ из равенств

$$u'_x = 2xy + 3x^2, \quad u'_y = x^2 - 5y^4. \tag{38}$$

Интегрируем по x первое из уравнений, считая y постоянной:

$$u(x,y) = \int \left(2xy + 3x^2\right) dx = x^2 y + x^3 + \varphi(y).$$

Отсюда $u'_y = x^2 + \varphi'(y)$. Подставляя это выражение во второе уравнение (38), находим $\varphi(y)$:

$$\varphi(y) = -\int 5y^4 dy = -y^5 + \mathrm{const}\,.$$

Можно взять $u(x,y) = x^2 y + x^3 - y^5$. Общий интеграл дифференциального уравнения (37) имеет вид

$$x^2 y + x^3 - y^5 = C. \tag{39}$$

Способ 2. Воспользуемся формулой (36):

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} \left(2ty_0 + 3t^2\right) dt + \int\limits_{y_0}^{y} \left(x^2 - 5z^4\right) dz =$$

$$= \left[t^2 y_0 + t^3\right]_{t=x_0}^{t=x} + \left[x^2 z - z^5\right]_{z=y_0}^{z=y} =$$

$$= x^2 y_0 + x^3 - x_0^2 y_0 - x_0^3 + x^2 y - y^5 - x^2 y_0 + y_0^5 = x^3 + x^2 y - y^5 + \mathrm{const}\,.$$

Здесь $\mathrm{const} = -x_0^2 y_0 - x_0^3 + y_0^5$. Следовательно, общий интеграл выражается той же формулой (39). $\square$

Решить дифференциальные уравнения:

31. $4\left(x^3 - xy^3\right) dx + 6\left(y^5 - x^2 y^2\right) dy = 0.$

32. $\dfrac{3x^2 + y^2}{y^2} dx - \dfrac{2x^3 + 5y}{y^3} dy = 0.$

33. $\left(3x^2 \operatorname{tg} y - \dfrac{2y^3}{x^3}\right) dx + \left(x^3 \sec^2 y + 4y^3 + \dfrac{3y^2}{x^2}\right) dy = 0.$

34. $\left(\dfrac{xy}{\sqrt{1+x^2}}+2xy-\dfrac{y}{x}\right)dx+\left(\sqrt{1+x^2}+x^2-\ln x\right)dy=0.$

35. $\left(\dfrac{x}{\sin y}+2\right)dx+\dfrac{\left(x^2+1\right)\cos y}{\cos 2y-1}dy=0.$

Контрольное задание №6

В каждом варианте найти общий интеграл дифференциального уравнения:

6.1. $\left(3x^2+2xy^6\right)dx+\left(3y^2+6x^2y^5\right)dy=0.$

6.2. $\left(3x^2+y^2+3x^2y^5\right)dx+\left(2xy+5x^3y^4\right)dy=0.$

6.3. $\left(2xy+y^2+4x^3y^4\right)dx+\left(x^2+2xy+4x^4y^3\right)dy=0.$

6.4. $\left(y^2+5x^4y^3\right)dx+\left(2xy+3y^2+3x^5y^2\right)dy=0.$

6.5. $\left(2xy+6x^5y^2\right)dx+\left(x^2+3y^2+2x^6y\right)dy=0.$

6.6. $\left(3x^2+y^2+2xy^6\right)dx+\left(2xy+6x^2y^5\right)dy=0.$

6.7. $\left(3x^2+2xy+3x^2y^5\right)dx+\left(x^2+5x^3y^4\right)dy=0.$

6.8. $\left(2xy+4x^3y^4\right)dx+\left(x^2+3y^2+4x^4y^3\right)dy=0.$

6.9. $\left(3x^2+5x^4y^3\right)dx+\left(3y^2+3x^5y^2\right)dy=0.$

6.10. $\left(y^2+6x^5y^2\right)dx+\left(2xy+3y^2+2x^6y\right)dy=0.$

6.11. $\left(3x^2+2xy+2xy^6\right)dx+\left(x^2+6x^2y^5\right)dy=0.$

6.12. $\left(2xy+y^2+3x^2y^5\right)dx+\left(x^2+2xy+5x^3y^4\right)dy=0.$

6.13. $\left(y^2+4x^3y^4\right)dx+\left(2xy+3y^2+4x^4y^3\right)dy=0.$

6.14. $\left(3x^2+y^2+5x^4y^3\right)dx+\left(2xy+3x^5y^2\right)dy=0.$

6.15. $\left(3x^2+2xy+6x^5y^2\right)dx+\left(x^2+2x^6y\right)dy=0.$

6.16. $\left(2xy+y^2+2xy^6\right)dx+\left(x^2+2xy+6x^2y^5\right)dy=0.$

6.17. $\left(2xy+3x^2y^5\right)dx+\left(x^2+3y^2+5x^3y^4\right)dy=0.$

6.18. $\left(3x^2+4x^3y^4\right)dx+\left(3y^2+4x^4y^3\right)dy=0.$

6.19. $\left(3x^2+2xy+5x^4y^3\right)dx+\left(x^2+3x^5y^2\right)dy=0.$

6.20. $\left(2xy+y^2+6x^5y^2\right)dx+\left(x^2+2xy+2x^6y\right)dy=0.$

6.21. $2\left(xy+xy^6\right)dx+\left(x^2+3y^2+6x^2y^5\right)dy=0.$

6.22. $\left(y^2+3x^2y^5\right)dx+\left(2xy+3y^2+5x^3y^4\right)dy=0.$

6.23. $\left(3x^2+y^2+4x^3y^4\right)dx+\left(2xy+4x^4y^3\right)dy=0.$

6.24. $\left(2xy+y^2+5x^4y^3\right)dx+\left(x^2+2xy+3x^5y^2\right)dy=0.$

6.25. $\left(3x^2+6x^5y^2\right)dx+\left(3y^2+2x^6y\right)dy=0.$

6.26. $\left(y^2+2xy^6\right)dx+\left(2xy+3y^2+6x^2y^5\right)dy=0.$

6.27. $3x^2\left(1+y^5\right)dx+y^2\left(3+5x^3y^2\right)dy=0.$

6.28. $\left(3x^2+2xy+4x^3y^4\right)dx+\left(x^2+4x^4y^3\right)dy=0.$

6.29. $\left(2xy+5x^4y^3\right)dx+\left(x^2+3y^2+3x^5y^2\right)dy=0.$
6.30. $\left(3x^2+y^2+6x^5y^2\right)dx+\left(2xy+2x^6y\right)dy=0.$

Контрольное задание №7

В каждом варианте найти общий интеграл дифференциального уравнения:

7.1. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{3x^2}{y}\right)dx+\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{x^3}{y^2}\right)dy=0.$

7.2. $\left(\operatorname{tg} y+\cos(x+y)\right)dx+\left(\dfrac{x}{\cos^2 y}+\cos(x+y)\right)dy=0.$

7.3. $\dfrac{(2x-y)dx+(2y+x)dy}{x^2+y^2}=0.$

7.4. $\left(2x+e^{x/y}\right)dx+e^{x/y}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)dy=0.$

7.5. $\left(y\cos x+\dfrac{1}{x}\right)dx+\left(\sin x+\dfrac{1}{y}\right)dy=0.$

7.6. $(\sin y+y\sin x)dx+(x\cos y-\cos x)dy=0.$

7.7. $\left(\dfrac{y}{\cos^2(xy)}-\dfrac{2x}{y}\right)dx+\left(\dfrac{x}{\cos^2(xy)}+\dfrac{x^2}{y^2}\right)dy=0.$

7.8. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^4}}+\dfrac{2}{x}\right)dx+\left(\dfrac{2y^3}{\sqrt{x^2+y^4}}-\dfrac{2}{y}\right)dy=0.$

7.9. $\left(-\dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{y}\sin\dfrac{x}{y}\right)dx+\left(\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y^2}\sin\dfrac{x}{y}\right)dy=0.$

7.10. $\left(\ln\left(1+y^2\right)-\sin(x+y)\right)dx+\left(\dfrac{2xy}{1+y^2}-\sin(x+y)\right)dy=0.$

7.11. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{y}\right)dx+\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{x}{y^2}\right)dy=0.$

7.12. $\left(3x^2\operatorname{tg} y+\cos(x+y)\right)dx+\left(\dfrac{x^3}{\cos^2 y}+\cos(x+y)\right)dy=0.$

7.13. $\dfrac{(2x-3y)dx+(3x+2y)dy}{x^2+y^2}=0.$

7.14. $\left(4x^3+e^{x/y}\right)dx+e^{x/y}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)dy=0.$

7.15. $\left(3y\sin^2 x\cos x+\dfrac{1}{x}\right)dx+\left(\sin^3 x+\dfrac{1}{y}\right)dy=0.$

7.16. $\left(3x^2\sin y+y\sin x\right)dx+\left(x^3\cos y-\cos x\right)dy=0.$

7.17. $\left(\dfrac{y}{\cos^2(xy)} - \dfrac{6x^5}{y}\right)dx + \left(\dfrac{x}{\cos^2(xy)} + \dfrac{2x^6}{y^2}\right)dy = 0.$

7.18. $\left(\dfrac{x}{\left(x^2+y^4\right)^{5/6}} + \dfrac{6}{x}\right)dx + \left(\dfrac{2y^3}{\left(x^2+y^4\right)^{5/6}} - \dfrac{2}{y}\right)dy = 0.$

7.19. $\left(-\dfrac{3y}{x^2}\cos\dfrac{3y}{x} + \dfrac{1}{y}\sin\dfrac{x}{y}\right)dx + \left(\dfrac{3}{x}\cos\dfrac{3y}{x} - \dfrac{x}{y^2}\sin\dfrac{x}{y}\right)dy = 0.$

7.20. $\left(\ln\left(1+y^6\right) - \sin(x+y)\right)dx + \left(\dfrac{6xy^5}{1+y^6} - \sin(x+y)\right)dy = 0.$

7.21. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{1}{y^2}\right)dx + \left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{2x}{y^3}\right)dy = 0.$

7.22. $\big(\operatorname{tg} y + 2\cos(2x+y)\big)dx + \left(\dfrac{x}{\cos^2 y} + \cos(2x+y)\right)dy = 0.$

7.23. $\dfrac{(4x-y)dx + (x+4y)dy}{x^2+y^2} = 0.$

7.24. $\left(2x + ye^{x/y}\right)dx + e^{x/y}(2y-x)dy = 0.$

7.25. $\left(y^2\cos x + \dfrac{1}{x}\right)dx + \left(2y\sin x + \dfrac{1}{y}\right)dy = 0.$

7.26. $\left(\sin y + y^2\sin x\right)dx + (x\cos y - 2y\cos x)dy = 0.$

7.27. $\left(\dfrac{y^2}{\cos^2\left(xy^2\right)} - \dfrac{2x}{y}\right)dx + \left(\dfrac{2xy}{\cos^2\left(xy^2\right)} + \dfrac{2x^2}{y^2}\right)dy = 0.$

7.28. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^6}} + \dfrac{2}{x}\right)dx + \left(\dfrac{3y^5}{\sqrt{x^2+y^6}} - \dfrac{4}{y}\right)dy = 0.$

7.29. $\left(-\dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x} + \dfrac{2}{y}\sin\dfrac{2x}{y}\right)dx + \left(\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x} - \dfrac{2x}{y^2}\sin\dfrac{2x}{y}\right)dy = 0.$

7.30. $\left(\ln\left(1+y^2\right) - 2\sin(2x+y)\right)dx + \left(\dfrac{2xy}{1+y^2} - \sin(2x+y)\right)dy = 0.$

§7. Уравнения Клеро и Лагранжа

Отметим, что дифференциальные уравнения вида (2) или (3) могут иметь решения, которые и не заключаются в семействе общего интеграла, т. е. не могут быть получены из формулы (11) (или (12)) ни при каких частных значениях постоянной C. Такие решения называются *особыми решениями.* Они обладают тем свойством, что в каждой точке соответствующей интегральной кривой нарушается единственность решения начальной задачи.

Пример 13. Найти общее и особые решения дифференциального уравнения

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}. \tag{40}$$

Р е ш е н и е. Интегрируем уравнение методом разделения переменных (§3):

$$\frac{dy}{3y^{2/3}} = dx \quad \Leftrightarrow \quad y^{1/3} = x + C \quad \Leftrightarrow \quad y = (x+C)^3. \tag{41}$$

Общее решение уравнения (40) изображается семейством кубических парабол с вершинами на оси Ox (рис. 7).

y

a O b x

Рис. 7.

При делении обеих частей уравнения (40) на $3\sqrt[3]{y^2} \neq 0$ могло быть потеряно решение $y = 0$. Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться, что это решение действительно является решением дифференциального уравнения (40). Так как оно не может быть получено из формулы (41) ни при каком постоянном значении C, то решение $y = 0$ будет особым. Как видно из рис. 7, через каждую точку оси Ox проходит бесконечное множество решений: одна из кубических парабол $y = (x+C)^3$, прямая $y = 0$ и различные кривые, "склеенные" из отрезка $[a, b]$ и двух половинок различных парабол $y = (x-b)^3$, $x > b$ и $y = (x-a)^3$, $x < a$ (см. рис. 7).

Кроме того, график особого решения $y = 0$ является касательной для каждой кубической параболы $y = (x+C)^3$. В этом и состоит характеристическое свойство особого решения — его график в каждой своей точке касается некоторой интегральной кривой, причем в разных точках — разных кривых. $\square$

Такие кривые называются *огибающими* семейства интегральных кривых (рис. 8; см. пример 16). Если семейство интегральных кривых не имеет огибающей, то уравнение не имеет особых решений, и общее решение содержит *все* непрерывные решения уравнения. Отметим, что в точках оси Ox не выполнено условие б) из теоремы существования и единственности (§1), так как производная $\frac{\partial f}{\partial y} = y^{-1/3}$ обращается здесь в бесконечность.

y *Огибающая*

O x

Рис. 8.

*Уравнением Клеро** называется дифференциальное уравнение вида

$$y = xy' + g(y'), \tag{42}$$

где функция $g(y')$ не является линейной. При условии, что $g(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция и $g''(t) \neq 0$ при $t \in (\alpha, \beta)$, проинтегрируем его с помощью *метода введения параметра.* Обозначив $y' = p$, уравнение (42) представим в виде

$$y = xp + g(p). \tag{43}$$

* А.К. Клеро (A.C. Clairaut, 1713—1765) — французский математик и астроном.

Взяв дифференциалы от обеих частей и положив слева $dy = y'dx = p\,dx$, запишем дифференциальное уравнение первого порядка для p:

$$p\,dx = p\,dx + x\,dp + g'(p)dp \quad \text{или} \quad \bigl(x + g'(p)\bigr)dp = 0.$$

Приравнивая нулю каждый из множителей, получаем два уравнения. Уравнение $dp = 0$ дает $p = C$, где C — произвольная постоянная. Подставляя $p = C$ в уравнение (43), приходим к общему решению уравнения Клеро:

$$y = xC + g(C).$$

Во втором случае имеем уравнение

$$x + g'(p) = 0, \tag{44}$$

которое вместе с уравнением (43) дает решение дифференциального уравнения (42) в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = -g'(p), \\ y = -g'(p)p + g(p), \end{cases} \qquad p \in (\alpha, \beta).$$

Исключая, если возможно, p из этих уравнений, получаем решение уравнения (42), уже не содержащее произвольной постоянной. Это решение обычно является особым решением дифференциального уравнения (42) [4].

Пример 14. Найти такую кривую, чтобы отрезок ее касательной между координатными осями имел постоянную длину a (рис. 9).

Р е ш е н и е. Уравнение касательной к кривой $y = y(x)$ в точке (x, y) запишется так:

$$Y - y = y'(x)(X - x).$$

Определяя отсюда координаты точек $T_1\left(\frac{xy'-y}{y'}, 0\right)$ и $T_2\,(0, y - xy')$, находим

$$a^2 = |T_1T_2|^2 = \left(\frac{xy' - y}{y'}\right)^2 + (y - xy')^2$$

или

$$y = xy' \pm \frac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}}\,.$$

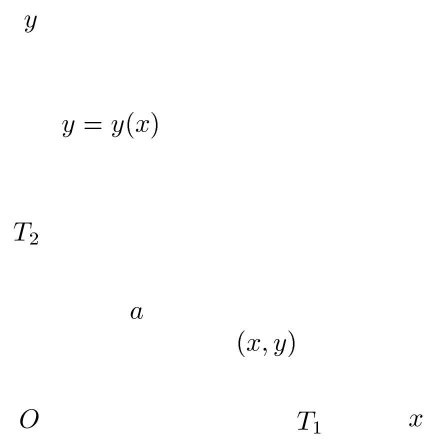

Рис. 9.

Полученное дифференциальное уравнение искомой кривой является уравнением Клеро. Его общий интеграл

$$y = xC \pm \frac{aC}{\sqrt{1+C^2}} \tag{45}$$

представляет собой семейство прямых линий, длина отрезка которых между координатными осями равна a. Особое решение получится в результате исключения p из уравнения

$$y = xp \pm \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} \tag{46}$$

и уравнения

$$x \pm a\frac{\sqrt{1+p^2} - \frac{p^2}{\sqrt{1+p^2}}}{1+p^2} = 0,$$

которое имеет вид

$$x \pm \frac{a}{(1+p^2)^{3/2}} = 0.$$

Полагая $p = \operatorname{tg} t$, получаем

$$x = \mp a \cos^3 t,$$

и из уравнения (46) находим

$$y = \mp a \cos^3 t \cdot \operatorname{tg} t \pm a \sin t = \pm a \sin^3 t.$$

y a

$-a$ O a x

$-a$

Рис. 10.

Возводя два последних равенства в степень $\frac{2}{3}$ и складывая почленно, исключаем t:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

Искомая кривая есть астроида (рис. 10). Прямые (45) образуют семейство касательных к ней. $\square$

*Уравнением Лагранжа** называется дифференциальное уравнение вида

$$y = xf(y') + g(y'), \tag{47}$$

* Ж.Л. Лагранж (J.L. Lagrange, 1736—1813) — французский математик и механик.

т. е. уравнение, линейное относительно x и y, но не решенное относительно y'. В случае $f(y') \equiv y'$ имеем уравнение Клеро.

Пусть $f(t) \not\equiv t$ и функции $f(t)$, $g(t)$ — непрерывно дифференцируемы при $t \in (\alpha, \beta)$. Применим к уравнению (47) тот же метод (метод введения параметра), что и к уравнению Клеро. Обозначив $y' = p$, перепишем уравнение (47) в виде

$$y = xf(p) + g(p). \tag{48}$$

Взяв дифференциалы от обеих частей, найдем уравнение первого порядка для p:

$$p\,dx = f(p)dx + xf^{'}(p)dp + g'(p)dp. \tag{49}$$

Разделив на dp, получим уравнение

$$\big(f(p) - p\big)\frac{dx}{dp} + f^{'}(p)x + g'(p) = 0, \tag{50}$$

которое является линейным дифференциальным уравнением, если считать x функцией от p.

Интегрируя его (см. §5), находим общее решение в виде

$$x = \varphi(p)C + \psi(p), \qquad p \in (\alpha, \beta). \tag{51}$$

Подставляя это выражение x в уравнение (48), приходим к уравнению вида

$$y = \varphi_1(p)C + \psi_1(p). \tag{52}$$

Формулы (51) и (52) выражают x и y через произвольную постоянную C и переменный параметр p, т. е. дают параметрическое представление общего интеграла уравнения Лагранжа. Если исключить из уравнений (51) и (52) параметр p, то получим обычное уравнение для общего интеграла.

При делении уравнения на dp могли быть потеряны решения, соответствующие значению $dp = 0$, т. е. соответствующие постоянным значениям p или, что то же, y'. Но постоянное значение y' приводит к линейной функции для y, а значит интегральные кривые, соответствующие потерянным решениям (если таковые есть), должны быть прямыми линиями. Заметим, что при постоянном $p = a$ уравнение (49) дает уравнение

$$a\,dx = f(a)dx,$$

и, следовательно, значение постоянной a должно определяться из уравнения

$$f(a) = a. \tag{53}$$

Решая это уравнение и подставляя найденные для $y' = a$ значения в уравнение (47), получаем искомые решения:

$$y = xf(a) + g(a) \quad \text{или} \quad y = ax + g(a), \tag{54}$$

среди которых должны заключаться и особые решения.

Пример 15. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$y = xy'^2 + y'^2. \tag{55}$$

Р е ш е н и е. Это уравнение Лагранжа. Положим $y' = p$, тогда

$$y = xp^2 + p^2. \tag{56}$$

Взяв дифференциалы от обеих частей равенства (56) и проведя замену $dy = p\,dx$, придем к уравнению

$$p\,dx = p^2 dx + 2px\,dp + 2p\,dp.$$

Отсюда, разделив обе части на $p \neq 0$, получим уравнение с разделяющимися переменными (§3):

$$(1-p)dx = 2(x+1)dp.$$

Интегрируя его, находим

$$\ln|x+1| = -2\ln|1-p| + \ln C \quad \text{или} \quad x + 1 = \frac{C}{(p-1)^2}\,.$$

Используя (52), получаем $y = \dfrac{Cp^2}{(p-1)^2}\,.$

Таким образом, уравнение Лагранжа (55) имеет общее решение в параметрической форме

$$\begin{cases} x = \dfrac{C}{(p-1)^2} - 1, \\ y = \dfrac{Cp^2}{(p-1)^2}\,. \end{cases} \tag{57}$$

Чтобы получить общее решение дифференциального уравнения (55) в непараметрической форме, следует исключить p из (57) и решить полученное уравнение относительно y. В итоге будем иметь:

$$y = x + 1 + C \pm 2\sqrt{C(x+1)}.$$

Для нахождения особых решений уравнения (55) рассмотрим уравнение (53): $a^2 = a$. Оно имеет корни $a_1 = 0$ и $a_2 = 1$, которым соответствуют решения (54):

$$y = 0 \quad \text{и} \quad y = x + 1.$$

Первое из них является особым решением, а второе получается из общего решения при $C = 0$. □

Пример 16. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$y'^2 - 2x^3 y' + 4x^2 y = 0. \tag{58}$$

Р е ш е н и е. Это дифференциальное уравнение не является ни уравнением Клеро, ни уравнением Лагранжа. Тем не менее, оно интегрируется описанным выше способом. Положим $y' = p$, тогда

$$p^2 - 2x^3 p + 4x^2 y = 0. \tag{59}$$

Разделив на x^2, взяв дифференциалы от обеих частей равенства, проведя замену $dy = p\,dx$ и упростив, придем к дифференциальному уравнению

$$p\,dx - \frac{p^2}{x^3}dx - x\,dp + \frac{p}{x^2}dp = 0.$$

Разложив левую часть на множители, имеем уравнение

$$\left(1 - \frac{p}{x^3}\right)(p\,dx - x\,dp) = 0.$$

Отсюда, деля обе части на $1 - \frac{p}{x^3} \neq 0$, получаем уравнение с разделяющимися переменными (§3):

$$p\,dx = x\,dp.$$

Интегрируя его, находим

$$\ln|p| = \ln|x| + 2C \quad \text{или} \quad p = 2Cx.$$

Используя (59), получаем общее решение:

$$y = Cx^2 - C^2.$$

При делении на x^2 и $\left(1 - \frac{p}{x^3}\right)$ могли быть потеряны решения $x = 0$ и $y' = p = x^3$.

Чтобы проверить, является ли $x = 0$ решением, следует, используя формулу для производной обратной функции $\left(y'_x = \frac{1}{x'_y}\right)$, переписать дифференциальное уравнение (58) в виде

$$1 - 2x^3 x'_y + 4x^2 y {x'_y}^2 = 0. \tag{60}$$

Подставляя $x = 0$ и $x'_y = 0$ в уравнение (60), убеждаемся, что оно не обращается в верное равенство и, следовательно, $x = 0$ не является решением исходного уравнения (58).

Равенство $y' = x^3$ дает $y = \frac{x^4}{4} + \mathrm{const}$. Подставляя эти два равенства в уравнение (58), получаем $\mathrm{const} = 0$. Это означает, что $y = \frac{x^4}{4}$ является особым решением дифференциального уравнения (58).

На рис. 8 изображено поле интегральных кривых $y = Cx^2 - C^2$. Эти кривые имеют огибающую $y = \frac{x^4}{4}$. $\square$

Решить дифференциальные уравнения:

36. $y = xy' - {y'}^2$.
37. $2{y'}^2\,(y - xy') = 1$.
38. $2y\,(y' + 1) = x{y'}^2$.
39. $y = x{y'}^2 - 2{y'}^3$.
40. $y = \dfrac{3}{2}xy' + e^{y'}$.

Контрольное задание №8

В каждом варианте проинтегрировать дифференциальное уравнение Клеро:

8.1. $y = xy' - e^{y'} + y'$.

8.2. $3y = 3xy' - (y')^3 + 3y'$.

8.3. $y = xy' - \ln y' + 2y'$.

8.4. $2y = 2xy' - (y')^2 + 6y'$.

8.5. $y = xy' - e^{3y'} + 2y'$.

8.6. $y = xy' - e^{2y'} + y'$.

8.7. $3y = 3xy' - 4(y')^3 + 3y'$.

8.8. $y = xy' - 2\ln y' + 2y'$.

8.9. $y = xy' - (y')^2 + 3y'$.

8.10. $y = xy' - e^{4y'} + 2y'$.

8.11. $y = xy' - e^{y'} + 2y'$.

8.12. $3y = 3xy' - (y')^3 + 6y'$.

8.13. $y = xy' - \ln y' + y'$.

8.14. $2y = 2xy' - (y')^2 + 4y'$.

8.15. $y = xy' - e^{3y'} + y'$.

8.16. $y = xy' - e^{2y'} + 2y'$.

8.17. $3y = 3xy' - 4(y')^3 + 6y'$.

8.18. $y = xy' - 2\ln y' + y'$.

8.19. $y = xy' - (y')^2 + 2y'$.

8.20. $y = xy' - e^{4y'} + y'$.

8.21. $y = xy' - e^{y'} + 3y'$.

8.22. $3y = 3xy' - (y')^3 + 9y'$.

8.23. $y = xy' - \ln y' + 3y'$.

8.24. $2y = 2xy' - (y')^2 + 2y'$.

8.25. $y = xy' - e^{3y'} + 3y'$.

8.26. $y = xy' - e^{2y'} + 3y'$.

8.27. $3y = 3xy' - 4(y')^3 + 9y'$.

8.28. $y = xy' - 2\ln y' + 3y'$.

8.29. $y = xy' - (y')^2 + y'$.

8.30. $y = xy' - e^{4y'} + 3y'$.

Контрольное задание №9

В каждом варианте проинтегрировать дифференциальное уравнение Лагранжа:

9.1. $y = x\,(y')^2 + (y')^3 + 3\,(y')^2.$

9.2. $y = 2xy' + (y')^4.$

9.3. $y = x\left((y')^2 + y'\right) + \dfrac{3}{y'}\,.$

9.4. $y = 3xy' + (y')^5.$

9.5. $y = x\left((y')^2 + 2y'\right) + 2\,(y')^3 + 3\,(y')^2.$

9.6. $2y = xy' + 2\,(y')^{5/2}.$

9.7. $y = x\left(2\,(y')^2 - y'\right) + 2\,(y')^{3/2}.$

9.8. $y = \dfrac{x}{y'} + \left((y')^2 - 1\right)^{5/2}.$

9.9. $y = x\left(2\,(y')^2 + y'\right) + \dfrac{4}{y'}\,.$

9.10. $y = \dfrac{4x}{y'} + \left((y')^2 - 4\right)^{3/2}.$

9.11. $y = x\left((y')^2 + y'\right) + \dfrac{2}{y'}\,.$

9.12. $y = 3xy' + (y')^4 + (y')^2.$

9.13. $y = x\left((y')^2 + 2y'\right) + 4\,(y')^3 + 6\,(y')^2.$

9.14. $2y = xy' + 2\,(y')^{5/2} + (y')^{3/2}.$

9.15. $y = x\left(2\,(y')^2 - y'\right) + 4\,(y')^{3/2}.$

9.16. $y = \dfrac{x}{y'} + \left((y')^2 - 1\right)^{3/2}.$

9.17. $y = x\left(2\,(y')^2 + y'\right) + \dfrac{5}{y'}\,.$

9.18. $y = \dfrac{4x}{y'} + \sqrt{(y')^2 - 4}.$

9.19. $y = x\,(y')^2 + (y')^3 + 2\,(y')^2.$

9.20. $y = 2xy' + (y')^5 + (y')^3.$

9.21. $y = x\left((y')^2 + 2y'\right) + 6\,(y')^3 + 9\,(y')^2.$

9.22. $2y = xy' + 4\,(y')^{5/2} + 2\,(y')^{3/2}.$

9.23. $y = x\left(2\,(y')^2 - y'\right) + 4\,(y' - 1)^{3/2}.$

9.24. $y = \dfrac{x}{y'} + \sqrt{(y')^2 - 1}$.

9.25. $y = x\left(2\,(y')^2 + y'\right) + \dfrac{6}{y'}$.

9.26. $y = \dfrac{4x}{y'} + \left((y')^2 - 4\right)^{5/2}$.

9.27. $y = x\,(y')^2 + 2\,(y')^3 + (y')^2$.

9.28. $y = 2xy' + 2\,(y')^4 + 3\,(y')^2$.

9.29. $y = x\left((y')^2 + y'\right) + \dfrac{1}{y'}$.

9.30. $y = 3xy' + 5\,(y')^3 + 2\,(y')^2$.

§8. Общие сведения об уравнениях высших порядков

В этом параграфе приведем лишь теоретические результаты.

Для обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка вида (1) или решенного относительно старшей производной

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right) \tag{61}$$

начальные условия (условия Коши) состоят в задании значений функции y и ее производных до $(n-1)$-го порядка включительно при некотором определенном значении $x = x_0$:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_{01}, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1}. \tag{62}$$

В этих условиях y_0, y_{01}, ..., y_{0n-1} — заданные числа.

Для уравнения n-го порядка (61), как и для уравнения первого порядка, имеет место

2. Теорема существования и единственности. *Если функция* $f\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right)$ *непрерывна при всех значениях* x*, близких к* x_0*, и значениях* y*,* y'*,* y''*, ...,* $y^{(n-1)}$*, близких к* (62)*, и непрерывны ее частные производные первого порядка по* y*,* y'*,* y''*, ...,* $y^{(n-1)}$*, то начальным условиям* (62) *соответствует одно определенное решение дифференциального уравнения* (61) *для* x*, близких к* x_0.

Изменяя в начальных условиях постоянные y_0, y_{01}, ..., y_{0n-1}, получаем бесчисленное множество решений, зависящее от n произвольных постоянных. Эти произвольные постоянные могут входить в решение и не как начальные условия, а в более общей форме:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n). \tag{63}$$

Такое решение уравнения (61), содержащее n произвольных постоянных, называется *общим решением дифференциального* уравнения (61). Уравнение (63) может быть записано и в неявной форме:

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0 \tag{64}$$

Уравнение (64) называется *общим интегралом дифференциального* уравнения (61). Придавая постоянным C_1, C_2, ..., C_n в (63) или (64) определенные значения, получаем *частное решение* или *частный интеграл* соответственно дифференциального уравнения (61).

Всякое решение, которое не заключается в семействе общего интеграла, т. е. не может быть получено из формулы (63) (или (64)) ни при каких значениях постоянных C_k, называется *особым решением* дифференциального уравнения.

§9. Уравнения, допускающие понижение порядка

9.1. Уравнения, содержащие только независимую переменную и производную высшего порядка

Дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = f(x) \tag{65}$$

является непосредственным обобщением уравнения $y' = f(x)$.

Его общее решение дается формулой

$$y = \underset{\bullet}{\int} dx \underset{\bullet}{\int} dx \ldots \underset{\bullet}{\int} dx \underset{\bullet}{\int} f(x)dx + C_1 + C_2 x + \ldots + C_n x^{n-1}, \tag{66}$$

где C_1, C_2, ..., C_n — произвольные постоянные.

Укажем еще несколько частных случаев, когда порядок дифференциального уравнения может быть понижен.

9.2. Уравнения, не содержащие искомой функции и последовательных первых производных

Если дифференциальное уравнение не содержит искомой функции y и ее нескольких последовательных производных y', y'', ..., $y^{(k-1)}$, т. е. имеет вид

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0,$$

то его порядок можно понизить на k единиц, взяв за новую неизвестную функцию $z = y^{(k)}$:

$$F\left(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}\right) = 0.$$

Если найдем общее решение этого последнего уравнения:

$$z = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}),$$

то y определится из уравнения типа (65):

$$y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}),$$

которое далее решается так, как указано в п. 9.1.

Пример 17. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$y'' + 2xy' = 0. \qquad (67)$$

Р е ш е н и е. Обозначим $z = z(x) = y'$. Тогда $z' = y''$. Подставляя это соотношение в уравнение (67), получаем

$$z' + 2xz = 0.$$

Отделяя переменные, интегрируем (см. §3):

$$\frac{dz}{z} + 2x\,dx = 0,$$

$$\ln|z| + x^2 = C, \quad \text{или} \quad z = C_1 e^{-x^2}.$$

Заменяя z на y', получаем

$$y' = C_1 e^{-x^2}.$$

Следовательно, выражение

$$y = C_1 \int e^{-x^2}\,dx + C_2 \qquad (68)$$

является общим решением дифференциального уравнения (67), записанным в квадратурах $\left(\text{интеграл от } e^{-x^2}\right.$ не выражается через элементарные функции$\left.\right)$. $\square$

9.3. Уравнения, не содержащие независимой переменной

Если дифференциальное уравнение не содержит переменной x, т. е. имеет вид

$$F\left(y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{69}$$

то его порядок можно понизить на единицу, взяв за новую независимую переменную y и новую неизвестную функцию $z = z(y) = y'$. Считая, что z, являясь функцией от y, зависит от x, и применяя правило дифференцирования сложных функций, для производных от y по x получаем выражения

$$\begin{aligned}
&y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z'z,\\
&y''' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dy}z\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dy}z\right)\frac{dy}{dx} = z''z^2 + z'^2 z,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

откуда видно, что в новых переменных порядок уравнения будет $(n-1)$.

Пример 18. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' = 3y^5 \tag{70}$$

и выделить частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y'(0) = y(0) = 1$.

Р е ш е н и е. В уравнение (70) явно не входит x. Полагаем $z(y) = y'$. Подставляя $y'' = z'z$ в уравнение, получаем

$$z'z = 3y^5.$$

Разделяя переменные (см. §3), интегрируем уравнение

$$z\,dz = 3y^5 dy \quad \Leftrightarrow \quad z^2 = y^6 + C_1.$$

Заменяя z на y' и решая уравнение относительно y', приводим его к виду

$$\pm y' = \sqrt{y^6 + C_1}. \tag{71}$$

Общий интеграл имеет вид (см. §3):

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^6 + C_1}} = \pm x + C_2 \tag{72}$$

и не выражается в элементарных функциях.

Для решения начальной задачи будем определять константы последовательно: из уравнения (71) получаем $C_1 = 0$. Тогда (71) примет вид

$$y' = y^3.$$

Интегрируя это уравнение методом §3, вместо (72) получаем

$$-\frac{1}{2y^2} = x + C_2,$$

откуда при учете условия $y(0) = 1$ имеем $C_2 = -\frac{1}{2}$. Окончательно,

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - 2x}}. \quad \square$$

9.4. Уравнения, однородные относительно неизвестной функции и ее производных

Если дифференциальное уравнение однородно относительно y и его производных, т. е. не изменяется при одновременной замене y, y', y'', … на ky, ky', ky'', …, то, вводя новую неизвестную функцию $z = z(x) = \frac{y'}{y}$, можно понизить порядок уравнения на единицу.

Это следует из формул

$$y' = zy, \quad y'' = z'y + zy' = y\left(z' + z^2\right), \quad \dots$$

и из того, что после подстановки в левую часть рассматриваемого уравнения вынесется некоторая степень y (в силу однородности), и на этот множитель можно разделить обе части уравнения (возможно, потеряв при этом решение $y = 0$).

Пример 19. Решить дифференциальное уравнение

$$x^2yy'' = \left(y - xy'\right)^2 . \tag{73}$$

Р е ш е н и е. Данное уравнение однородно относительно y, y', y''. Полагаем $y' = zy$. Подставляя y' и $y'' = y\left(z' + z^2\right)$ в уравнение (73), получаем

$$x^2y^2\left(z' + z^2\right) = (y - xzy)^2 \quad \text{или} \quad y^2\left(x^2z' - 1 + 2xz\right) = 0.$$

Деля на y^2, приходим к линейному дифференциальному уравнению (см. §5):

$$x^2z' + 2xz = 1.$$

Упростим интегрирование. Для этого левую часть последнего уравнения запишем в виде

$$\left(x^2z\right)' = 1.$$

Тогда

$$x^2z = x + C_1 \quad \text{или} \quad z = \frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2} .$$

Заменяя здесь z на $\frac{y'}{y}$ и интегрируя (см. §3), получаем общий интеграл дифференциального уравнения (73)

$$\ln|y| = \ln|x| - \frac{C_1}{x} + \ln C_2$$

или общее решение

$$y = C_2xe^{-\frac{C_1}{x}} .$$

Очевидное решение $y = 0$ является частным, так как содержится в этой формуле при $C_2 = 0$. $\square$

Решить дифференциальные уравнения:

41. $y''' = \sin x + 24x$.
42. $y'' = e^x(x + 2)$.
43. $y^{(IV)} = \dfrac{6}{x^4}$.

44. $y'' = \operatorname{arctg} x$.
45. $xy''' = y'' - xy''$.
46. $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$.
47. $2xy'' - y' = 9x^2$.
48. $xy'' - y' = {y'}^2$.
49. $y'' + 2y{y'}^3 = 0$.
50. $y^2 y'' = {y'}^3 + y{y'}^2$.
51. $yy'' - {y'}^2 = y^2 y'$.
52. $y'' - {y'}^2 = y{y'}^3$.
53. $xyy'' - x{y'}^2 = 2yy'$.
54. $\sin x \cdot y^2 + e^x y\,(y' + y'') = e^x {y'}^2$.
55. $x^2 yy'' - xyy' + 4y^2 = x^2 {y'}^2$.
56. $xyy'' + x{y'}^2 = 5yy'$.

Найти решения, удовлетворяющие заданным начальным условиям:
57. $y''' = xe^{-x}$, $\quad y(0) = 0$, $\quad y'(0) = 2$, $\quad y''(0) = 2$.
58. $2\sin x \cdot y'' + y' \cos x = {y'}^3 (x\cos x - \sin x)$, $\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2\pi}$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.
59. $y'' + {y'}^2 = 2e^{-y}$, $\quad y(0) = 0$, $\quad y'(0) = 2$.
60. $y'y''' - 3{y''}^2 = 0$, $\quad y(1) = -1$, $\quad y'(1) = -1$, $\quad y''(1) = 2$.

Контрольное задание №10

В каждом варианте найти общее решение дифференциального уравнения:
10.1. $xy''' = y'' + 2$.
10.2. $x^3 y''' + 3x^2 y'' = 2\cos\ln x$.
10.3. $\left(x^2 - x\right) y''' = (2 - x)y''$.
10.4. $xy''' - 2y'' = 4$.
10.5. $y'''(2\ln x + 3)x = 2y''$.
10.6. $\operatorname{tg} x \cdot y''' + 2y'' = 0$.
10.7. $y''' = \dfrac{3}{x} \cdot y'' + 12x$.
10.8. $y''' + 3\,(y'')^2 \sqrt{1 - 2x} = 0$.
10.9. $\operatorname{tg} 3x \cdot y''' = 6y''$.
10.10. $x^3 y''' + 3x^2 y'' = 8\sin\ln x$.

10.11. $xy''' - y'' = 12x^2$.
10.12. $y''' = 6\left(y''\right)^2\sqrt{x+1}$.
10.13. $\left(2x^2 - x\right)y''' = 2(1-x)y''$.
10.14. $y''' - \dfrac{2}{x}y'' = 6$.
10.15. $\operatorname{tg} x \cdot y''' = y''$.
10.16. $y''' = (y'')^2\sqrt{6x+5}$.
10.17. $xy''' - 3y'' = 12x$.
10.18. $\operatorname{tg} 3x \cdot y''' = 3y''$.
10.19. $x^3y''' + 3x^2y'' = 4\cos\ln x$.
10.20. $\operatorname{tg} 2x \cdot y''' + 4y'' = 0$.
10.21. $y''' = \dfrac{y''}{x} + 40x^2$.
10.22. $y''' = 3\left(y''\right)^2\sqrt{2x+7}$.
10.23. $\left(x^2 - 2x\right)y''' = (4-x)y''$.
10.24. $xy''' = 2y'' + 20x^3$.
10.25. $\operatorname{tg} 3x \cdot y''' + 6y'' = 0$.
10.26. $y''' = 2\left(y''\right)^2\sqrt{3x+4}$.
10.27. $xy''' - 6 = 3y''$.
10.28. $x^3y''' + 3x^2y'' = 6\sin\ln x$.
10.29. $\operatorname{tg} 2x \cdot y''' = 4y''$.
10.30. $y''' + (y'')^2\sqrt{1-x} = 0$.

Контрольное задание №11

В каждом варианте найти решение задачи с начальными условиями:

11.1. $y'' = 8(1+3y)(1+y), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 8$.
11.2. $y'' + y'^2 = 2e^{-y}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$.
11.3. $y'' = \dfrac{\sin y}{\cos^3 y}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$.
11.4. $2yy''\ln y = y'^2(1 + 2\ln y), \quad y(0) = e, \quad y'(0) = e$.
11.5. $y'' = 16y(y-1)(2y-1), \quad y(0) = \frac{1}{2}, \quad y'(0) = 1$.
11.6. $y^2y'' + y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$.
11.7. $4y'' = \sin 4y, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}, \quad y'(0) = \frac{1}{2}$.
11.8. $y^6y'' + 5y' = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = \frac{1}{32}$.
11.9. $y'' = 2\left(1 + 4y + 3y^2\right), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$.
11.10. $y'' + y'^2 = 8e^{-y}, \quad y(0) = 2\ln 2, \quad y'(0) = 2$.
11.11. $y'' = \dfrac{4\sin y}{\cos^3 y}, \quad y(0) = \frac{\pi}{6}, \quad y'(0) = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

11.12. $3yy''\ln y = y'^2(2+3\ln y), \quad y(0)=e, \quad y'(0)=e.$
11.13. $y''=81y(2y-1)(4y-1), \quad y(0)=\frac{1}{3}, \quad y'(0)=1.$
11.14. $y^3y''+2y'=0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=1.$
11.15. $y''=\sin 4y, \quad y(0)=\frac{\pi}{4}, \quad y'(0)=1.$
11.16. $y^8y''+7y'=0, \quad y(0)=2, \quad y'(0)=\frac{1}{128}.$
11.17. $y''=8\left(1+4y+3y^2\right), \quad y(0)=3, \quad y'(0)=16\sqrt{3}.$
11.18. $y''+y'^2=8e^{-y}, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=4.$
11.19. $y''=\dfrac{9\sin y}{\cos^3 y}, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=3.$
11.20. $2yy''\ln y = y'^2(1+2\ln y), \quad y(1)=e, \quad y'(1)=e.$
11.21. $y''=256y(3y-1)(6y-1), \quad y(0)=\frac{1}{4}, \quad y'(0)=1.$
11.22. $y^4y''+3y'=0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=1.$
11.23. $y''=4\sin 4y, \quad y(0)=\frac{\pi}{4}, \quad y'(0)=2.$
11.24. $y^7y''+6y'=0, \quad y(0)=2, \quad y'(0)=\frac{1}{64}.$
11.25. $y''=2(1+y)(1+3y), \quad y(0)=1, \quad y'(0)=4.$
11.26. $y''+y'^2=2e^{-y}, \quad y(0)=2\ln 2, \quad y'(0)=1.$
11.27. $y''=\dfrac{\sin y}{\cos^3 y}, \quad y(0)=\dfrac{\pi}{6}, \quad y'(0)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}.$
11.28. $3yy''\ln y = y'^2(2+3\ln y), \quad y(1)=e, \quad y'(1)=e.$
11.29. $y''=64y(y-1)(2y-1), \quad y(0)=\frac{1}{2}, \quad y'(0)=2.$
11.30. $y^5y''+4y'=0, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=1.$

Контрольное задание №12

В каждом варианте найти общее решение дифференциального уравнения:

12.1. $xyy''-2xy'^2=3yy'.$
12.2. $x^2y'^2+y^2=x^2yy''+2xyy'.$
12.3. $e^{2x}\left(2yy'+yy''\right)=8\sin 2x\cdot y^2+e^{2x}y'^2.$
12.4. $xyy''+3xy'^2=4yy'.$
12.5. $3xyy'+x^2yy''=2y^2+x^2y'^2.$
12.6. $5xy'^2=7yy'-xyy''.$
12.7. $x^2y'^2=x^2yy''-xyy'+2y^2.$
12.8. $e^xyy''-30\cos 3x\cdot y^2=e^x(y'^2-yy').$
12.9. $2yy'+xyy''=4xy'^2.$
12.10. $x^2yy''+3y^2=x^2y'^2+2xyy'.$
12.11. $xyy''=2xy'^2+2yy'.$
12.12. $x^2y'^2-2xyy'=x^2yy''-3y^2.$

12.13. $e^{2x}(2yy' - y'^2) = 145\sin 5x \cdot y^2 - e^{2x}yy''$.
12.14. $3xy'^2 = 5yy' - xyy''$.
12.15. $x^2yy'' = x^2y'^2 - 3xyy' + 4y^2$.
12.16. $xyy'' + 5xy'^2 = 8yy'$.
12.17. $x^2yy'' + 4y^2 = xyy' + x^2y'^2$.
12.18. $e^xyy' - 10\cos 2x \cdot y^2 = e^x(y'^2 - yy'')$.
12.19. $xyy'' - 4xy'^2 = -3yy'$.
12.20. $x^2y'^2 - 6y^2 = x^2yy'' - 2xyy'$.
12.21. $2xy'^2 = yy' + xyy''$.
12.22. $2xyy' + x^2yy'' = 5y^2 + x^2y'^2$.
12.23. $e^{2x}(yy'' - y'^2) = 39\sin 3x \cdot y^2 - 2e^{2x}yy'$.
12.24. $xyy'' = 6yy' - 3xy'^2$.
12.25. $x^2y'^2 + 6y^2 = 3xyy' + x^2yy''$.
12.26. $9yy' = 5xy'^2 + xyy''$.
12.27. $x^2yy'' - xyy' = x^2y'^2 - 8y^2$.
12.28. $130\cos 5x \cdot y^2 + e^xy'^2 = e^x(yy'' + yy')$.
12.29. $4xy'^2 = 4yy' + xyy''$.
12.30. $2xyy' + x^2y'^2 = 9y^2 + x^2yy''$.

§10. Линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

10.1. Линейные однородные уравнения

Чтобы решить *линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка* (однородность здесь означает равенство нулю правой части) *с постоянными вещественными коэффициентами*

$$y'' + p_1y' + p_2 = 0, \tag{74}$$

следует составить *характеристическое уравнение*

$$\lambda^2 + p_1\lambda + p_2 = 0 \tag{75}$$

и найти его корни λ_1 и λ_2.

Если оба корня вещественные и разные ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), то $\varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ и $\varphi_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ — два *линейно независимых* $\left(\text{т. е. } \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \not\equiv \text{const}\right)$ решения уравнения (74), а его общее решение имеет вид

$$y_{\text{о.о}} = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}. \tag{76}$$

Если уравнение (75) имеет равные корни $\lambda_1 = \lambda_2$, т. е. ***кратность корня*** λ_1 характеристического уравнения (75) равна двум, то $\varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ и $\varphi_2(x) = xe^{\lambda_1 x}$ — два линейно независимых решения уравнения (74), а общее решение дается формулой

$$y_{\text{o.o}} = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda_1 x}. \tag{77}$$

Если уравнение (75) имеет два комплексно-сопряженных корня $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, то $\varphi_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $\varphi_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$ — два линейно независимых решения уравнения (74), а общее решение может быть записано в виде

$$y_{\text{o.o}} = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x). \tag{78}$$

Пример 20. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' - y = 0.$$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 1 = 0$ имеет два корня $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 1$, оба кратности 1. Следовательно, уравнение имеет общее решение $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x}$. $\square$

Пример 21. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' + y' = 0.$$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \lambda(\lambda + 1) = 0$ имеет два корня $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 0$, оба кратности 1. Следовательно, дифференциальное уравнение имеет общее решение $y = C_1 e^{-x} + C_2$. $\square$

Пример 22. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' + y = 0.$$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет пару комплексно-сопряженных корней $\lambda_1 = -i$ и $\lambda_2 = i$. Следовательно, дифференциальное уравнение имеет общее решение $y = C_1\cos x + C_2\sin x$. $\square$

Пример 23. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow (\lambda + 1)^2 = 0$ имеет один корень $\lambda_1 = -1$ кратности 2. Следовательно, дифференциальное уравнение имеет общее решение $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} = (C_1 + C_2 x)e^{-x}$. $\square$

Решить линейные однородные дифференциальные уравнения:
61. $y'' + k^2 y = 0$.
62. $y'' - a^2 y = 0$.
63. $y'' - 2y' - 15y = 0$.
64. $y'' - 6y' + 9y = 0$.
65. $y'' + 4y' + 5y = 0$.

10.2. Линейные неоднородные уравнения, метод неопределенных коэффициентов

Для *линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами*

$$y'' + p_1 y' + p_2 = q(x) \tag{79}$$

общее решение находится по формуле

$$y_{\text{о.н}} = y_{\text{о.о}} + y_{\text{ч.н}}, \tag{80}$$

где $y_{\text{о.о}}$ — общее решение соответствующего однородного уравнения (74), а $y_{\text{ч.н}}$ — какое-нибудь частное решение неоднородного уравнения (79).

Если в правой части уравнения (79) дана *функция специального вида*, т. е.

$$q(x) = e^{ax}\big(P_l(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx\big), \tag{81}$$

где $a, b \in \mathbb{R}$ и $P_l(x)$, $Q_m(x)$ — алгебраические полиномы от x степеней l и m, то частное решение можно найти методом *неопределенных коэффициентов* в виде

$$y_{\text{ч.н}} = x^k e^{ax}\left(\tilde{P}_s(x)\cos bx + \tilde{Q}_s(x)\sin bx\right). \tag{82}$$

Здесь

$$s = \max\{l, m\}, \tag{83}$$

$\tilde{P}_s(x)$, $\tilde{Q}_s(x)$ — алгебраические полиномы степени s с неизвестными пока коэффициентами, k — кратность корня $\lambda = a + bi$ характеристического уравнения (75) (если $a+bi$ не является корнем алгебраического уравнения, то его кратность равна нулю: $k = 0$). Коэффициенты полиномов определятся после того, как подставим функцию (82) в уравнение (79) и запишем условие равенства коэффициентов при одинаковых функциях. Преимущество этого метода состоит в том, что решение будет найдено без вычисления неопределенных интегралов.

Кроме того, если правая часть линейного дифференциального уравнения равна сумме $q_1(x)+q_2(x)+\ldots+q_p(x)$ нескольких функций, то частное решение такого уравнения равно сумме частных решений уравнений с той же левой частью и правыми частями $q_1(x)$, $q_2(x)$, $\ldots$, $q_p(x)$ (*принцип суперпозиции*).

Пример 24. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' + y' - 2y = xe^x. \tag{84}$$

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ имеет два корня $\lambda_1 = -2$ и $\lambda_2 = 1$ оба кратности 1. Следовательно, однородное уравнение

$$y'' + y' - 2y = 0$$

имеет общее решение $y_{\text{о.о}} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$.

Согласно формулам (81), (83) $a = 1$, $b = 0$, $P_l(x) = x$, $l = 1 = s$. Заметим, что параметры левой части в виде числа $a + bi = 1 + 0i$ совпадают с корнем $\lambda_2 = 1$ кратности $k = 1$. Частное решение ищем в виде (82):

$$y_{\text{ч.н}} = xe^x(Ax + B). \tag{85}$$

Подставляя его в уравнение (84), находим A и B:

$$y' = e^x\left(Ax^2 + (2A+B)x + B\right),$$
$$y'' = e^x\left(Ax^2 + (4A+B)x + 2A + 2B\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow e^x\left(Ax^2 + (4A+B)x + 2A + 2B\right) + e^x\left(Ax^2 + (2A+B)x + B\right) -$$
$$- 2e^x\left(Ax^2 + Bx\right) = xe^x \quad \text{или}$$

$$e^x(6Ax + 2A + 3B) = xe^x \Rightarrow \begin{cases} 6A = 1, \\ 2A + 3B = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{6}, \\ B = -\dfrac{1}{9}. \end{cases}$$

Следовательно, $y_{\text{ч.н}} = \dfrac{xe^x(3x-2)}{18}$.

Окончательно общее решение дифференциального уравнения (84) имеет вид

$$y_{\text{о.н}} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + \frac{xe^x(3x-2)}{18}. \quad \square$$

Пример 25. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' - y' = e^x + x + 2\sin x. \tag{86}$$

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - \lambda = 0$ имеет два корня $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 0$ оба кратности 1. Следовательно, однородное уравнение

$$y'' - y' = 0$$

имеет общее решение $y_{\text{о.о}} = C_1 e^x + C_2$.

Правая часть уравнения (86) является суммой трех функций специального вида. Рассмотрим вспомогательные уравнения:

а)

$$y'' - y' = e^x. \tag{87}$$

Согласно формулам (81), (83) здесь $a = 1$, $b = 0$, $P_l(x) \equiv 1$, $l = 0 = s$. Заметим, что параметры левой части в виде числа $a + bi = 1 + 0i$ совпадают с корнем $\lambda_1 = 1$ кратности $k = 1$. Частное решение ищем в виде (82):

$$y_{\text{ч.н}1} = Axe^x.$$

Подставляя его в уравнение (87), находим A:

$$\begin{aligned} &y' = A(x+1)e^x, \quad y'' = A(x+2)e^x \Rightarrow \\ &\qquad \Rightarrow A(x+2)e^x - A(x+1)e^x = e^x \quad \text{или} \quad Ae^x = e^x \Rightarrow A = 1. \end{aligned}$$

Следовательно, $y_{\text{ч.н}1} = xe^x$.

б)

$$y'' - y' = x. \tag{88}$$

Имеем $a = 0$, $b = 0$, $P_l(x) = x$, $l = 1 = s$ $\big($см. (81), (83)$\big)$. Снова параметры правой части образуют число $a + bi = 0 + 0i$, совпадающее с корнем $\lambda_2 = 0$ кратности $k = 1$. Частное решение будем искать в виде (82):

$$y_{\text{ч.н}2} = x(Bx + C).$$

Подставляя его в дифференциальное уравнение (88), находим B и C:

$$y' = 2Bx + C, \quad y'' = 2B \Rightarrow 2B - (2Bx + C) = x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2B - C = 0, \\ -2B = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -\dfrac{1}{2}, \\ C = -1. \end{cases}$$

Отсюда $y_{\text{ч.н}2} = -\frac{x^2}{2} - x$.

в)
$$y'' - y' = 2\sin x. \tag{89}$$

Здесь $a = 0$, $b = 1$, $P_l(x) = 0$, $Q_m(x) = 2$, $l = m = 0 = s$ $\big($см. (81), (83)$\big)$. Параметры правой части образуют число $a + bi = 0 + 1i$, не совпадающее ни с каким из λ_j, поэтому частное решение следует искать в виде $\big($см. (82)$\big)$

$$y_{\text{ч.н}3} = D\cos x + E\sin x.$$

Вычисляя последовательно производные $y' = -D\sin x + E\cos x$, $y'' = -D\cos x - E\sin x$ и подставляя их в уравнение (89), получаем

$$-D\cos x - E\sin x + D\sin x - E\cos x = 2\sin x.$$

Опираясь на линейную независимость $\cos x$ и $\sin x$, составляем систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -D - E = 0, \\ -E + D = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E = -1, \\ D = 1. \end{cases}.$$

Значит, $y_{\text{ч.н}3} = \cos x - \sin x$, и

$$y_{\text{ч.н}} = y_{\text{ч.н}1} + y_{\text{ч.н}2} + y_{\text{ч.н}3} = xe^x - \frac{x^2}{2} - x + \cos x - \sin x.$$

Окончательно общее решение дифференциального уравнения (86) имеет вид

$$y_{\text{о.н}} = C_1 e^x + C_2 + xe^x - \frac{x^2}{2} - x + \cos x - \sin x. \quad \square$$

В задачах 66—70 написать вид частного решения с неопределенными коэффициентами (не находя числовых значений):

66. $y'' + 5y' + 6y = x^2 \sin 3x$.
67. $y'' - 3y' + 2y = xe^{2x}$.
68. $y'' - 2y' + y = x^2 e^x$.
69. $y'' + 2y' + 5y = e^x \cos^2 x$.
70. $y'' + 4y = x \sin^2 x$.

Решить дифференциальные уравнения методом неопределенных коэффициентов:

71. $y'' - 3y' + 2y = -200x \cos 2x$.
72. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin x$.
73. $y'' - 2y' - 3y = -2e^{-x}\left(6x^2 + x + 1\right)$.
74. $y'' + 2y' + 5y = 8e^{-x} x^2$.
75. $y'' + 4y = 32x \sin^2 x$.

10.3. Линейные неоднородные уравнения, метод изменения (вариации) произвольных постоянных Лагранжа

В общем случае линейного неоднородного дифференциального уравнения (79) с заданной непрерывной функцией $q(x)$ в правой части можно при помощи квадратур найти общее решение, пользуясь *методом изменения (вариации) произвольных постоянных Лагранжа*.

Пусть уже найдено общее решение $y_{\text{о.о}} = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x)$ линейного однородного уравнения с той же левой частью. Тогда общее решение уравнения (79) может быть получено по формуле

$$y_{\text{о.н}} = u_1(x)\varphi_1(x) + u_2(x)\varphi_2(x),$$

где $u_j'(x)$ определяются из алгебраической системы линейных уравнений

$$\begin{cases} u_1'(x)\varphi_1(x) + u_2'(x)\varphi_2(x) = 0, \\ u_1'(x)\varphi_1'(x) + u_2'(x)\varphi_2'(x) = q(x). \end{cases} \tag{90}$$

Пример 26. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}\,. \tag{91}$$

Р е ш е н и е. Соответствующее однородное уравнение имеет вид

$$y'' + y = 0. \tag{92}$$

Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

и найдем его корни $\lambda_{1,2} = \pm i$. Общее решение уравнения (92) определим по формуле (78):

$$y_{\text{о.о}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Теперь будем искать общее решение $y_{\text{о.н}}$ уравнения (91) в виде

$$y_{\text{о.н}} = u_1(x) \cos x + u_2(x) \sin x, \tag{93}$$

где $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — неизвестные функции от x. Для их нахождения составим систему (90):

$$\begin{cases} u_1'(x) \cos x + u_2'(x) \sin(x) = 0, \\ -u_1'(x) \sin x + u_2'(x) \cos x = \dfrac{1}{\sin x}\,. \end{cases} \tag{94}$$

Умножим первое уравнение системы (94) на $\cos x$, а второе на $(-\sin x)$ и сложим их:

$$u_1'(x)\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) = -1 \quad \text{или} \quad u_1'(x) = -1.$$

Аналогично $u_2'(x) = \operatorname{ctg} x$. Отсюда, интегрируя, находим

$$u_1(x) = -x + \tilde{C}_1, \quad u_2(x) = \ln|\sin x| + \tilde{C}_2.$$

Подставляя выражения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ в (84), получаем общее решение дифференциального уравнения (91):

$$y_{\text{о.н}} = \tilde{C}_1 \cos x + \tilde{C}_2 \sin x - x \cos x + \sin x \ln|\sin x|.$$

Здесь $y_{\text{ч.н}} = -x\cos x + \sin x \ln|\sin x|$ является частным решением исходного неоднородного уравнения, т. е. общее решение и в этом случае имеет вид (80). $\square$

Решить дифференциальные уравнения методом изменения произвольных постоянных Лагранжа:

76. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$.
77. $y'' - y' = e^{2x} \cos e^x$.
78. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$.
79. $y'' + 4y = 8 \operatorname{ctg} x$.
80. $y'' + y = 3 \left(\sin^5 x \cos x\right)^{-1/2}$.

Контрольное задание №13

В каждом варианте найти общее решение дифференциального уравнения:

13.1. $y'' - 4y' + 3y = 0$.
13.2. $y'' - 4y' + 4y = 0$.
13.3. $y'' + 4y = 0$.
13.4. $y'' - y' - 2y = 0$.
13.5. $y'' - 2y' = 0$.
13.6. $y'' - 2y' + 2y = 0$.
13.7. $y'' + 5y' + 4y = 0$.
13.8. $y'' + 6y' + 9y = 0$.
13.9. $y'' + 25y = 0$.
13.10. $y'' - 2y' - 3y = 0$.
13.11. $y'' + 3y' = 0$.
13.12. $y'' + 6y' + 10y = 0$.
13.13. $y'' - 5y' + 4y = 0$.
13.14. $y'' - 8y' + 16y = 0$.
13.15. $y'' + 16y = 0$.
13.16. $y'' + 2y' - 3y = 0$.
13.17. $y'' - 3y' = 0$.
13.18. $y'' - 4y' + 5y = 0$.
13.19. $y'' + 4y' + 3y = 0$.
13.20. $y'' + 4y' + 4y = 0$.
13.21. $y'' + 9y = 0$.
13.22. $y'' + y' - 2y = 0$.
13.23. $y'' + 2y' = 0$.
13.24. $y'' + 2y' + 2y = 0$.
13.25. $y'' - 5y' + 6y = 0$.
13.26. $y'' - 4y = 0$.

13.27. $y'' - 6y' + 10y = 0.$
13.28. $y'' + 2y' + y = 0.$
13.29. $y'' + 3y' - 4y = 0.$
13.30. $y'' + 2y' + 6y = 0.$

Контрольное задание №14

В каждом варианте написать вид частного решения с неопределенными коэффициентами (не находя их числовых значений):

14.1. $y'' - 5y' + 4y = xe^{4x} + \sin 4x + \cos x.$
14.2. $y'' - 6y' + 10y = e^{3x}\sin x + e^{3x} + \cos x.$
14.3. $y'' + 25y = x^5 e^{5x} + \sin 5x + \cos 25x.$
14.4. $y'' + 3y' = x^3 e^{-3x} + x^3 + \sin 3x.$
14.5. $y'' - y' - 2y = x^2 e^{2x} + \sin x + \cos 2x.$
14.6. $y'' + y' - 2y = xe^{2x} + \sin 2x + \cos x.$
14.7. $y'' - 4y' = x^4 e^{4x} + x^4 + \sin 4x.$
14.8. $y'' + 16y = x^4 e^{4x} + \sin 4x + \cos 16x.$
14.9. $y'' + 5y' + 4y = xe^{-x} + \sin 4x + \cos x.$
14.10. $y'' + 9y = x^3 e^{3x} + \sin 9x + \cos 3x.$
14.11. $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x + e^x + \cos x.$
14.12. $y'' - 4y' + 3y = x^3 e^x + \sin x + \cos 3x.$
14.13. $y'' + 6y' + 9y = x^2 e^{-3x} + \sin 3x + e^{3x}.$
14.14. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\sin x + e^{-x} + \cos x.$
14.15. $y'' + 2y' + y = x^2 e^{-x} + \sin x + e^x.$
14.16. $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x + e^x + \sin 2x.$
14.17. $y'' - 2y' - 3y = x^3 e^{3x} + \sin 3x + \cos x.$
14.18. $y'' - 5y' + 6y = x^3 e^{2x} + \sin 2x + \cos 3x.$
14.19. $y'' + 2y' = x^2 e^{-2x} + x^2 + \sin 2x.$
14.20. $y'' + 6y' + 10y = e^{-3x}\cos x + e^{-3x} + \sin x.$
14.21. $y'' + 4y' + 3y = x^2 e^{-x} + \sin x + \cos 3x.$
14.22. $y'' + 2y' - 3y = xe^x + \sin 3x + \cos x.$
14.23. $y'' - 4y' + 4y = x^2 e^{2x} + \sin 2x + \cos x.$
14.24. $y'' - 2y' = x^2 e^{2x} + x^2 + \sin 2x.$
14.25. $y'' + 3y' - 4y = xe^x + \sin x + \cos 4x.$
14.26. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\cos x + e^{2x} + \sin x.$
14.27. $y'' + 4y' + 4y = xe^{-2x} + \cos 2x + e^{2x}.$
14.28. $y'' - 3y' = x^3 e^{3x} + x^3 + \sin 3x.$
14.29. $y'' - 8y' + 16y = x^4 e^{4x} + \sin x + \cos 4x.$
14.30. $y'' + 4y = x^2 e^{2x} + \sin 4x + \cos 2x.$

Контрольное задание №15

В каждом варианте найти общее решение дифференциального уравнения:

15.1. $y'' - 10y' + 26y = e^x(8\cos x + 24\sin x)$.
15.2. $y'' + 8y' + 17y = e^x(60\cos x + 5\sin x)$.
15.3. $y'' - 8y' + 25y = e^x(45\cos x + 35\sin x)$.
15.4. $y'' + 6y' + 10y = e^x(72\cos x - 16\sin x)$.
15.5. $y'' - 6y' + 18y = e^x(56\cos x + 32\sin x)$.
15.6. $y'' + 4y' + 5y = e^x(60\cos x - 27\sin x)$.
15.7. $y'' - 4y' + 20y = e^x(110\cos x + 30\sin x)$.
15.8. $y'' + 2y' + 2y = e^x(36\cos x - 28\sin x)$.
15.9. $y'' + 10y' + 29y = e^x(363\cos x - 69\sin x)$.
15.10. $y'' - 10y' + 34y = e^x(232\cos x + 104\sin x)$.
15.11. $y'' + 8y' + 20y = e^x(318\cos x - 82\sin x)$.
15.12. $y'' - 8y' + 17y = e^x(102\cos x + 81\sin x)$.
15.13. $y'' + 6y' + 13y = e^x(255\cos x - 85\sin x)$.
15.14. $y'' - 6y' + 10y = e^x(52\cos x + 60\sin x)$.
15.15. $y'' + 4y' + 8y = e^x(186\cos x - 78\sin x)$.
15.16. $y'' - 4y' + 13y = e^x(142\cos x + 41\sin x)$.
15.17. $y'' + 2y' + 5y = e^x(123\cos x - 61\sin x)$.
15.18. $y'' + 10y' + 34y = e^x(804\cos x - 172\sin x)$.
15.19. $y'' - 10y' + 29y = e^x(353\cos x + 171\sin x)$.
15.20. $y'' + 8y' + 25y = e^x(670\cos x - 167\sin x)$.
15.21. $y'' - 8y' + 20y = e^x(246\cos x + 138\sin x)$.
15.22. $y'' + 6y' + 18y = e^x(536\cos x - 152\sin x)$.
15.23. $y'' - 6y' + 13y = e^x(157\cos x + 99\sin x)$.
15.24. $y'' + 4y' + 13y = e^x(414\cos x - 127\sin x)$.
15.25. $y'' - 4y' + 8y = e^x(98\cos x + 54\sin x)$.
15.26. $y'' + 2y' + 10y = e^x(316\cos x - 92\sin x)$.
15.27. $y'' + 10y' + 26y = e^x(984\cos x - 288\sin x)$.
15.28. $y'' - 4y' + 5y = e^x(26\cos x + 57\sin x)$.
15.29. $y'' + 4y' + 20y = e^x(702\cos x - 150\sin x)$.
15.30. $y'' - 6y' + 25y = e^x(566\cos x + 139\sin x)$.

Контрольное задание №16

В каждом варианте найти общее решение дифференциального уравнения:

16.1. $y'' + 4y = 4\cos 2x - 16\sin 2x$.

16.2. $y'' + 9y = 12\cos 3x - 24\sin 3x$.
16.3. $y'' + 16y = 24\cos 4x - 32\sin 4x$.
16.4. $y'' + 25y = 40\cos 5x - 40\sin 5x$.
16.5. $y'' + 36y = 60\cos 6x - 48\sin 6x$.
16.6. $y'' + 49y = 84\cos 7x - 56\sin 7x$.
16.7. $y'' + 64y = 112\cos 8x - 64\sin 8x$.
16.8. $y'' + 81y = 144\cos 9x - 72\sin 9x$.
16.9. $y'' + 4y = 36\cos 2x - 16\sin 2x$.
16.10. $y'' + 9y = 60\cos 3x - 6\sin 3x$.
16.11. $y'' + 16y = 8\cos 4x - 8\sin 4x$.
16.12. $y'' + 25y = 20\cos 5x - 10\sin 5x$.
16.13. $y'' + 36y = 36\cos 6x - 12\sin 6x$.
16.14. $y'' + 49y = 56\cos 7x - 14\sin 7x$.
16.15. $y'' + 64y = 80\cos 8x - 16\sin 8x$.
16.16. $y'' + 81y = 108\cos 9x - 18\sin 9x$.
16.17. $y'' + 4y = 28\cos 2x - 4\sin 2x$.
16.18. $y'' + 9y = 48\cos 3x - 6\sin 3x$.
16.19. $y'' + 16y = 72\cos 4x - 8\sin 4x$.
16.20. $y'' + 25y = 100\cos 5x - 20\sin 5x$.
16.21. $y'' + 36y = 12\cos 6x - 24\sin 6x$.
16.22. $y'' + 49y = 28\cos 7x - 28\sin 7x$.
16.23. $y'' + 64y = 48\cos 8x - 32\sin 8x$.
16.24. $y'' + 81y = 72\cos 9x - 36\sin 9x$.
16.25. $y'' + 4y = 20\cos 2x - 8\sin 2x$.
16.26. $y'' + 9y = 36\cos 3x - 12\sin 3x$.
16.27. $y'' + 16y = 56\cos 4x - 16\sin 4x$.
16.28. $y'' + 25y = 80\cos 5x - 20\sin 5x$.
16.29. $y'' + 36y = 108\cos 6x - 24\sin 6x$.
16.30. $y'' + 49y = 140\cos 7x - 42\sin 7x$.

Контрольное задание №17

В каждом варианте найти общее решение дифференциального уравнения:

17.1. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\operatorname{cosec} x$.
17.2. $y'' + 100y = 10\operatorname{tg} 5x$.
17.3. $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2x}}{x}$.
17.4. $y'' + 9y = 6\operatorname{tg} 3x$.

17.5. $y'' + 2y' + 10y = \dfrac{\sec 3x}{e^x}$.

17.6. $y'' + 36y = 36 \sec 6x$.

17.7. $y'' + 9y' + 18y = \dfrac{9}{1 + e^{3x}}$.

17.8. $y'' - y' - 6y = \dfrac{1 + 2x + 24x^2}{\sqrt{x^3}}$.

17.9. $y'' + 64y = 8 \operatorname{tg} 4x$.

17.10. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2}$.

17.11. $y'' + 4y' = \dfrac{16}{1 + e^{-4x}}$.

17.12. $y'' + 4y' + 8y = \dfrac{\sec 2x}{e^{2x}}$.

17.13. $y'' + 16y = 32 \operatorname{ctg} 4x$.

17.14. $y'' - 12y' + 32y = \dfrac{16e^{8x}}{1 + e^{4x}}$.

17.15. $y'' + 4y = \dfrac{4x^2 + 12}{x^5}$.

17.16. $y'' - 2y' + 2y = e^x \operatorname{cosec} x$.

17.17. $y'' + 36y = 6 \operatorname{tg} 3x$.

17.18. $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2x}}{x^2}$.

17.19. $y'' + 4y = 6 \operatorname{tg} 2x$.

17.20. $y'' + 4y' + 5y = \dfrac{\sec x}{e^{2x}}$.

17.21. $y'' + 64y = 64 \sec 8x$.

17.22. $y'' + 9y' + 18y = \dfrac{9}{e^{3x}\left(1 + e^{3x}\right)}$.

17.23. $y'' + y' - 2y = \dfrac{1 - 2x + 8x^2}{\sqrt{x^3}}$.

17.24. $y'' + 16y = 4 \operatorname{tg} 2x$.

17.25. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^3}$.

17.26. $y'' - 5y' = \dfrac{25}{1 + e^{5x}}$.

17.27. $y'' + 2y' + 17y = \dfrac{\sec 4x}{e^x}$.

17.28. $y'' + 9y = 18 \operatorname{ctg} 3x$.

17.29. $y'' - 12y' + 32y = \dfrac{16}{1 + e^{-4x}}$.

17.30. $y'' + y = \dfrac{x + 6}{x^4}$.

§11. Элементы теории линейных уравнений высших порядков с постоянными коэффициентами

11.1. Линейные однородные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

Линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0, \tag{95}$$

где p_1, p_2, $\ldots$, p_n — заданные вещественные числа. Его общим решением является функция

$$y_{\text{о.о}} = C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x) + \ldots + C_n \varphi_n(x), \tag{96}$$

где $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\ldots$, $\varphi_n(x)$ — *линейно независимые** частные решения уравнения (95), а C_1, C_2, $\ldots$, C_n — произвольные постоянные. Характеристическое уравнение составляется аналогично уравнению (75):

$$\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1} \lambda + p_n = 0. \tag{97}$$

Каждому вещественному корню λ уравнения (97) кратности $k \geqslant 1$ соответствует k линейно независимых частных решений $e^{\lambda x}$, $xe^{\lambda x}$, $\ldots$, $x^{k-1}e^{\lambda x}$.

Каждой паре комплексных корней $\lambda = \alpha \pm \beta i$ кратности $k \geqslant 1$ соответствует k пар линейно независимых частных решений

$$\begin{cases} e^{\alpha x}\cos\beta x, & xe^{\alpha x}\cos\beta x, \quad \ldots, \; x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, \\ e^{\alpha x}\sin\beta x, & xe^{\alpha x}\sin\beta x, \quad \ldots, \; x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x. \end{cases}$$

Пример 27. Решить дифференциальное уравнение

$$y^{(IV)} - 2y''' + 5y'' - 8y' + 4y = 0. \tag{98}$$

Р е ш е н и е. Соответствующее характеристическое уравнение

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0$$

* Функции $\varphi_1(x)$, $\ldots$, $\varphi_k(x)$ называются **линейно независимыми**, если выполнение тождества $\alpha_1\varphi_1(x) + \ldots + \alpha_k\varphi_k(x) \equiv 0$ при всех $x \in \langle a, b\rangle$ возможно лишь тогда, когда $\alpha_1 = 0$, $\ldots$, $\alpha_k = 0$.

можно записать в виде

$$\left(\lambda^2+4\right)(\lambda-1)^2=0.$$

Оно имеет двойной вещественный корень $\lambda_1=\lambda_2=1$ (кратность корня $k=2$) и пару простых комплексно-сопряженных корней $\lambda_{3,4}=\pm 2i$. Общее решение однородного уравнения (98)

$$y_{\text{о.о}}=(C_1+C_2x)e^x+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x. \quad \square$$

Пример 28. Решить дифференциальное уравнение

$$y^{(IV)}-3y'''+3y''-y'=0. \tag{99}$$

Р е ш е н и е. Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^4-3\lambda^3+3\lambda^2-\lambda=0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda(\lambda-1)^3=0.$$

Найдем его корни $\lambda_1=0$, $\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$. Следовательно, общее решение однородного уравнения (99) имеет вид

$$y_{\text{о.о}}=C_1+C_2e^x+C_3xe^x+C_4x^2e^x. \quad \square$$

11.2. Линейные неоднородные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

Общее решение *линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами*

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}y'+p_ny=q(x) \tag{100}$$

находится по формуле

$$y_{\text{о.н}}=y_{\text{о.о}}+y_{\text{ч.н}}, \tag{101}$$

где $y_{\text{о.о}}$ — общее решение однородного уравнения с той же левой частью, а $y_{\text{ч.н}}$ — частное решение уравнения (100).

В случае, если $q(x)$ — функция специального вида (81), частное решение можно найти методом неопределенных коэффициентов (п. 10.2).

Пример 29. Решить дифференциальное уравнение

$$y''' - y' = \sin x. \tag{102}$$

Р е ш е н и е. Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - \lambda = 0.$$

Найдем его корни: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$. Следовательно, общее решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (102), имеет вид

$$y_{\text{о.о}} = C_1 e^{-x} + C_2 + C_3 e^x. \tag{103}$$

Так как $a = 0$, $b = 1$, $l = m = s = 0$, $0 + i \neq \lambda_j$, $k = 0$ $\big($см. (81), (82)$\big)$, то ищем частное решение уравнения (102) в виде

$$y_{\text{ч.н}} = A\cos x + B\sin x. \tag{104}$$

Для нахождения A и B продифференцируем выражение (104) три раза и подставим полученное в (102). Будем иметь

$$2A\sin x - 2B\cos x = \sin x \;\Rightarrow \begin{cases} 2A = 1 \\ -2B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{2}, \\ B = 0. \end{cases}$$

Подставляя A и B в формулу (104) и, далее, (104) и (103) в (101), приходим к общему решению уравнения (102):

$$y_{\text{о.н}} = C_1 e^{-x} + C_2 + C_3 e^x + \frac{\cos x}{2}. \quad \square$$

В случае, если $q(x)$ не является функцией специального вида (81) (или их суммой), для нахождения общего решения можно применить метод изменения (вариации) произвольных постоянных Лагранжа. Вместо произвольных постоянных C_k в формулу (96) введем неизвестные функции u_k:

$$y_{\text{о.н}} = u_1(x)\varphi_1(x) + u_2(x)\varphi_2(x) + \ldots + u_n(x)\varphi_n(x). \tag{105}$$

Производные от функций u_k должны удовлетворять системе линейных алгебраических уравнений (ср. п. 10.3 и (90)):

$$\begin{cases} u_1'(x)\varphi_1(x) + u_2'(x)\varphi_2(x) + \ldots + u_n'(x)\varphi_n(x) = 0, \\ u_1'(x)\varphi_1'(x) + u_2'(x)\varphi_2'(x) + \ldots + u_n'(x)\varphi_n'(x) = 0, \\ \quad\vdots \\ u_1'(x)\varphi_1^{(n-2)}(x) + u_2'(x)\varphi_2^{(n-2)}(x) + \ldots + u_n'(x)\varphi_n^{(n-2)}(x) = 0, \\ u_1'(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) + u_2'(x)\varphi_2^{(n-1)}(x) + \ldots + u_n'(x)\varphi_n^{(n-1)}(x) = f(x). \end{cases} \tag{106}$$

Пример 30. Решить дифференциальное уравнение

$$y^{(IV)} - 2y''' + y'' = \frac{24 + 12x + 2x^2}{x^5}. \tag{107}$$

Р е ш е н и е. Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2 = 0.$$

Найдем его корни: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$. Следовательно, общее решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (107), имеет вид

$$y_{\text{о.о}} = C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x)e^x.$$

Ищем общее решение уравнения (107) в виде

$$y_{\text{о.н}} = u_1(x) + u_2(x)x + \big(u_3(x) + u_4(x)x\big)e^x. \tag{108}$$

Для нахождения неизвестных функций u_k запишем систему (106):

$$\begin{cases} u_1'(x) + u_2'(x)x + \big(u_3'(x) + u_4'(x)x\big)e^x = 0, \\ u_2'(x) + \big(u_3'(x) + u_4'(x)(x+1)\big)e^x = 0, \\ \big(u_3'(x) + u_4'(x)(x+2)\big)e^x = 0, \\ \big(u_3'(x) + u_4'(x)(x+3)\big)e^x = \dfrac{24 + 12x + 2x^2}{x^5}. \end{cases}$$

Вычитая из четвертого уравнения третье, получаем

$$u_4'(x) = \frac{24 + 12x + 2x^2}{x^5}e^{-x}.$$

Далее последовательно определяем

$$u_3'(x) = -u_4'(x)(x+2) = -\frac{2x^3+16x^2+48x+48}{x^5}e^{-x},$$

$$u_2'(x) = u_4'(x)e^x = \frac{24+12x+2x^2}{x^5}\,,$$

$$u_1'(x) = -u_2'(x)x + 2u_4'(x)e^x =$$
$$= -\frac{24x+12x^2+2x^3}{x^5} + 2\frac{24+12x+2x^2}{x^5} = \frac{-2x^3-8x^2+48}{x^5}\,.$$

Интегрируя эти равенства, находим

$$u_1(x) = \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{12}{x^4} + C_1,$$

$$u_2(x) = -\frac{6}{x^4} - \frac{4}{x^3} - \frac{1}{x^2} + C_2,$$

$$u_3(x) = \left(\frac{12}{x^4} + \frac{12}{x^3} + \frac{2}{x^2}\right)e^{-x} + C_3,$$

$$u_4(x) = \left(-\frac{6}{x^4} - \frac{2}{x^3}\right)e^{-x} + C_4.$$

При интегрировании можно воспользоваться рекуррентными формулами для интегралов $I_k = \int \frac{dx}{x^k e^x}$. При $k > 1$ справедливо

$$I_k = -\frac{1}{k-1}\left(\frac{1}{x^{k-1}e^x} + I_{k-1}\right).$$

Эти формулы могут быть получены простым интегрированием по частям.

Подставляя теперь функции u_k в равенство (108), приходим к общему решению уравнения (107):

$$y_{\text{о.н}} = C_1 + C_2x + (C_3 + C_4x)e^x + \frac{1}{x}\,. \quad \square$$

Найти решения дифференциальных уравнений:

81. $y^{(V)} - 3y^{(IV)} + 3y''' - 3y'' + 2y' = 0$.
82. $y''' - 6y'' + 10y' = 30x^2 + 4x + 12$.
83. $y^{(IV)} + 5y''' + 6y'' - 4y' - 8y = e^{-2x}(\cos x - 3\sin x)$.
84. $y^{(IV)} - y''' - y'' - y' - 2y = 20\sin x$.
85. $y''' - 3y'' + 4y = \dfrac{3 + 6x + 32x^2}{x^2\sqrt{x}}$.

Контрольное задание №18

В каждом варианте найти общее решение дифференциального уравнения:

18.1. $y''' - 4y'' - 5y' = -15x^2 - 44x - 15$.
18.2. $y''' - 9y'' + 20y' = 60x^2 + 26x + 10$.
18.3. $y''' - 7y'' + 12y' = 36x^2 - 66x + 56$.
18.4. $y''' - 5y'' + 6y' = 18x^2 - 42x + 40$.
18.5. $y''' - 3y'' + 2y' = -6x^2 + 26x - 8$.
18.6. $y''' - 3y'' - 10y' = 30x^2 - 22x - 78$.
18.7. $y''' - 2y'' - 8y' = 24x^2 + 28x - 58$.
18.8. $y''' - y'' - 6y' = 18x^2 + 18x - 52$.
18.9. $y''' + y'' - 2y' = -6x^2 - 2x + 8$.
18.10. $y''' - 3y'' - 4y' = -12x^2 - 34x - 14$.
18.11. $y''' - 2y'' - 3y' = -9x^2 - 6x + 1$.
18.12. $y''' - y'' - 2y' = -6x^2 - 2x$.
18.13. $y''' - 8y'' + 15y' = -45x^2 + 108x + 37$.
18.14. $y''' - 7y'' + 10y' = -30x^2 + 82x + 26$.
18.15. $y''' - 6y'' + 5y' = -15x^2 + 26x + 41$.
18.16. $y''' - 5y'' + 4y' = -12x^2 + 22x + 36$.
18.17. $y''' - 6y'' + 8y' = 24x^2 - 4x - 10$.
18.18. $y''' - 4y'' + 3y' = 9x^2 - 12x - 4$.
18.19. $y''' - 2y'' - 15y' = -45x^2 + 18x - 35$.
18.20. $y''' - y'' - 12y' = -36x^2 + 18x - 40$.
18.21. $y''' + y'' - 6y' = 18x^2 - 30x - 32$.
18.22. $y''' + 2y'' - 3y' = 9x^2 - 24x - 16$.
18.23. $y''' + 3y'' - 4y' = 12x^2 - 10x - 40$.
18.24. $y''' + 2y'' - 8y' = 24x^2 + 4x - 74$.
18.25. $y''' + y'' - 12y' = -36x^2 - 42x - 2$.
18.26. $y''' - y'' - 20y' = -60x^2 - 86x - 38$.
18.27. $y''' + 4y'' - 5y' = -15x^2 + 34x - 17$.

18.28. $y''' + 3y'' - 10y' = -30x^2 + 38x - 40.$
18.29. $y''' + 2y'' - 15y' = 45x^2 - 72x - 73.$
18.30. $y''' + y'' - 20y' = 60x^2 - 86x - 122.$

Контрольное задание №19

В каждом варианте найти общее решение дифференциального уравнения:

19.1. $y''' + 5y'' - y' - 5y = e^{2x}(21x + 52).$
19.2. $y''' + 4y'' - 7y' - 10y = e^{x}(-12x - 20).$
19.3. $y''' + 3y'' - 13y' - 15y = e^{x}(-24x - 76).$
19.4. $y''' + 2y'' - 18y' - 20y = e^{x}(-35x - 151).$
19.5. $y''' - 3y'' - 9y' - 5y = e^{x}(-16x - 92).$
19.6. $y''' - 8y'' + 11y' + 20y = e^{x}(24x + 142).$
19.7. $y''' - 6y'' + 5y' + 12y = e^{x}(12x + 80).$
19.8. $y''' - 4y'' + y' + 6y = e^{x}(4x + 28).$
19.9. $y''' - 3y'' - y' + 3y = e^{2x}(-3x - 4).$
19.10. $y''' - 2y'' - 13y' - 10y = e^{x}(-24x - 62).$
19.11. $y''' - y'' - 10y' - 8y = e^{x}(-18x - 63).$
19.12. $y''' - 7y' - 6y = e^{x}(-12x - 52).$
19.13. $y''' + 2y'' - y' - 2y = e^{2x}(12x + 79).$
19.14. $y''' - 2y'' - 7y' - 4y = e^{x}(-12x - 80).$
19.15. $y''' - y'' - 5y' - 3y = e^{x}(-8x - 60).$
19.16. $y''' - 3y' - 2y = e^{x}(-4x - 32).$
19.17. $y''' - 7y'' + 7y' + 15y = e^{x}(16x + 12).$
19.18. $y''' - 6y'' + 3y' + 10y = e^{x}(8x + 10).$
19.19. $y''' - 5y'' - y' + 5y = e^{2x}(-9x - 36).$
19.20. $y''' - 4y'' - y' + 4y = e^{2x}(-6x - 29).$
19.21. $y''' - 5y'' + 2y' + 8y = e^{x}(6x + 25).$
19.22. $y''' - 3y'' - y' + 3y = e^{2x}(-3x - 19).$
19.23. $y''' - y'' - 17y' - 15y = e^{x}(-32x - 240).$
19.24. $y''' - 13y' - 12y = e^{x}(-24x - 202).$
19.25. $y''' + 2y'' - 5y' - 6y = e^{x}(-8x - 6).$
19.26. $y''' + 3y'' - y' - 3y = e^{2x}(15x + 53).$
19.27. $y''' + 4y'' - y' - 4y = e^{2x}(18x + 81).$
19.28. $y''' + 3y'' - 6y' - 8y = e^{x}(-10x - 37).$
19.29. $y''' + 2y'' - 11y' - 12y = e^{x}(-20x - 104).$
19.30. $y''' - 21y' - 20y = e^{x}(-40x - 258).$

§12. Уравнения Эйлера

*Однородное уравнение Эйлера** имеет вид

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0, \qquad (109)$$

где все a_1, a_2, $\ldots$, a_n — известные постоянные. Оно приводится к однородному линейному уравнению с постоянными коэффициентами, если вместо x ввести новую переменную t по формуле

$$x = e^t.$$

Другой способ заключается в том, чтобы искать решение уравнения (109) в виде $y = x^\lambda$.

Неоднородное уравнение Эйлера

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x)$$

с помощью той же замены $t = \ln x \Leftrightarrow x = e^t$ приводится к линейному неоднородному уравнению, которое интегрируется методами из пп. 10.2, 10.3, 11.2.

Но если имеется неоднородное уравнение вида

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = x^a P_m(\ln x), \qquad (110)$$

где $P_m(\ln x)$ — полином степени m от $\ln x$, то частное решение уравнения (110) по аналогии с п. 10.2 можно искать в виде

$$y = (\ln x)^k x^a Q_m(\ln x),$$

где $Q_m(\ln x)$ — полином степени m от $\ln x$ с неизвестными коэффициентами и k — кратность корня $\lambda = a$ соответствующего характеристического уравнения.

Пример 31. Решить дифференциальное уравнение

$$x^2 y'' - 4 x y' + 6 y = 0. \qquad (111)$$

---

* Л. Эйлер (L. Euler, 1707—1783) — швейцарский математик, работал в Петербургской АН (1726—1741, 1766—1783).

Р е ш е н и е.

Способ 1. Осуществим в уравнении (111) замену переменной $x = e^t$. Тогда

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt} = e^{-t}y'_t,$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt}\Big/\frac{dx}{dt} = \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)e^{-t}\Big/e^t = e^{-2t}\left(y''_{t^2} - y'_t\right),$$

и уравнение (111) примет вид

$$y''_{t^2} - y'_t - 4y'_t + 6y = 0 \quad \text{или} \quad y''_{t^2} - 5y'_t + 6y = 0.$$

Его характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. Поэтому общим решением последнего уравнения является

$$y = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}.$$

Делая здесь обратную замену, получаем общее решение уравнения (111):

$$y = C_1x^2 + C_2x^3.$$

Способ 2. Будем искать решение уравнения (111) в виде $y = x^\lambda$, где λ — неизвестное число. Тогда после подстановки его в уравнение (111) получаем

$$x^2\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} - 4x\lambda x^{\lambda-1} + 6x^\lambda = 0 \quad \text{или} \quad x^\lambda\left(\lambda^2 - \lambda - 4\lambda + 6\right) = 0.$$

Так как $x^k \not\equiv 0$, то $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$. Находя отсюда корни $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, записываем два линейно независимых решения уравнения (111): $\varphi_1(x) = x^2$ и $\varphi_2(x) = x^3$. Следовательно, общее решение имеет вид

$$y = C_1x^2 + C_2x^3. \quad \square$$

Пример 32. Решить дифференциальное уравнение

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = \ln x. \tag{112}$$

Р е ш е н и е. Соответствующее однородное уравнение решено в примере 31. Осталось найти частное решение уравнения (112).

Это уравнение имеет вид (110) при $a = 0$, $m = 1$. Так как корни характеристического уравнения $\lambda_{1,2} \neq 0$ (см. пример 31), то решение будем искать в виде

$$y = A \ln x + B.$$

Подставляя это выражение в уравнение (112), получаем

$$x^2 \left(-\frac{A}{x^2} \right) - 4x\frac{A}{x} + 6(A \ln x + B) = \ln x \quad \text{или} \quad -5A + 6B + 6A \ln x = \ln x.$$

Используя линейную независимость 1 и $\ln x$, составляем систему

$$\begin{cases} 6A = 1, \\ -5A + 6B = 0, \end{cases}$$

которая имеет решение $A = \frac{1}{6}$, $B = \frac{5}{36}$. В результате общее решение уравнения (112) имеет вид

$$y = C_1 x^2 + C_2 x^3 + \frac{1}{6} \ln x + \frac{5}{36}. \quad \square$$

Решить дифференциальные уравнения:

86. $x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$.
87. $x^2 y'' - 5xy' + 9y = 0$.
88. $x^3 y''' + xy' - y = 0$.
89. $x^2 y'' - 6xy' + 10y = 3x^2$.
90. $xy'' - 2y' = 4x \ln x$.

Контрольное задание №20

В каждом варианте найти общее решение дифференциального уравнения Эйлера:

20.1. $x^3 y''' - x^2 y'' - 4xy' + 4y = x^2(-6 \ln x - 29)$.
20.2. $x^3 y''' + 2x^2 y'' - 5xy' - 3y = x(-8 \ln x - 60)$.
20.3. $x^3 y''' + x^2 y'' - 14xy' - 10y = x(-24 \ln x - 62)$.
20.4. $x^3 y''' - 11xy' - 5y = x(-16 \ln x - 92)$.
20.5. $x^3 y''' + 3x^2 y'' - 12xy' - 12y = x(-24 \ln x - 202)$.
20.6. $x^3 y''' - 2x^2 y'' - 5xy' + 5y = x^2(-9 \ln x - 36)$.
20.7. $x^3 y''' + x^2 y'' - 8xy' - 4y = x(-12 \ln x - 80)$.
20.8. $x^3 y''' - 3xy' + 3y = x^2(-3 \ln x - 4)$.

20.9. $x^3y''' + 5x^2y'' - 15xy' - 20y = x(-35\ln x - 151)$.
20.10. $x^3y''' + 7x^2y'' + 4xy' - 4y = x^2(18\ln x + 81)$.
20.11. $x^3y''' + 2x^2y'' - 17xy' - 15y = x(-32\ln x - 240)$.
20.12. $x^3y''' - 3x^2y'' - 2xy' + 10y = x(8\ln x + 10)$.
20.13. $x^3y''' + 5x^2y'' + 2xy' - 2y = x^2(12\ln x + 79)$.
20.14. $x^3y''' - x^2y'' - 2xy' + 6y = x(4\ln x + 28)$.
20.15. $x^3y''' + 6x^2y'' - 9xy' - 15y = x(-24\ln x - 76)$.
20.16. $x^3y''' + 5x^2y'' - 8xy' - 12y = x(-20\ln x - 104)$.
20.17. $x^3y''' + 6x^2y'' + 3xy' - 3y = x^2(15\ln x + 53)$.
20.18. $x^3y''' - 3xy' + 3y = x^2(-3\ln x - 19)$.
20.19. $x^3y''' - 4x^2y'' + xy' + 15y = x(16\ln x + 12)$.
20.20. $x^3y''' + 3x^2y'' - 6xy' - 6y = x(-12\ln x - 52)$.
20.21. $x^3y''' - 3x^2y'' + 12y = x(12\ln x + 80)$.
20.22. $x^3y''' + 7x^2y'' - 2xy' - 10y = x(-12\ln x - 20)$.
20.23. $x^3y''' + 3x^2y'' - 20xy' + 20y = x(-40\ln x - 158)$.
20.24. $x^3y''' + 6x^2y'' - 2xy' - 8y = x(-10\ln x - 37)$.
20.25. $x^3y''' + 5x^2y'' - 2xy' - 6y = x(-8\ln x - 6)$.
20.26. $x^3y''' - 2x^2y'' - 2xy' + 8y = x(6\ln x + 25)$.
20.27. $x^3y''' + 3x^2y'' - 2xy' - 2y = x(-4\ln x - 32)$.
20.28. $x^3y''' + 2x^2y'' - 10xy' - 8y = x(-18\ln x - 63)$.
20.29. $x^3y''' - 5x^2y'' + 4xy' + 20y = x(24\ln x + 142)$.
20.30. $x^3y''' + 8x^2y'' + 5xy' - 5y = x^2(21\ln x + 52)$.

§13. Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами

Пусть имеется система линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + f_1(t), \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + f_2(t), \\ \quad\vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + f_n(t), \end{cases} \tag{113}$$

где $y_k = y_k(t)$ — искомые функции, y_k' — их производные $\frac{dy_k}{dt}$ и a_{ij} — заданные постоянные коэффициенты.

Линейная система называется *однородной*, если все $f_i(t) \equiv 0$. *Решением системы дифференциальных уравнений* (113) *называется совокупность функций* $y_1 = \varphi_1(t)$, $y_2 = \varphi_2(t)$, $\ldots$, $y_n = \varphi_n(t)$, *определенных и непрерывно дифференцируемых в интервале* (a, b), *таких, что при подстановке их в уравнения системы* (113) *те превращаются в тождества, справедливые для всех значений* $t \in (a, b)$.

Однородная система линейных дифференциальных уравнений всегда имеет тривиальное решение

$$y_1 \equiv y_2 \equiv \ldots \equiv y_n \equiv 0.$$

Решения системы (113) интерпретируются геометрически в виде *интегральных кривых* в $(n+1)$-мерном пространстве с координатами t, y_1, y_2, …, y_n (ср. §1).

Как и в случае одного уравнения (см. §1, §9), имеет место

3. Теорема существования и единственности: *если функции* $f_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *непрерывны на* (a, b), *то существует одно и только одно решение системы* (113) $y_i = \varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *удовлетворяющее начальным условиям*

$$y_1(t_0) = y_1^{(0)}, \quad y_2(t_0) = y_2^{(0)}, \quad \ldots, \quad y_n(t_0) = y_n^{(0)}, \tag{114}$$

где $t_0 \in (a, b)$, $y_i^{(0)}$ *— любые заданные числа.* Теорема доказана в работе [2].

Общим решением системы дифференциальных уравнений (113) *называется совокупность функций*

$$y_i = \varphi_i(t, C_1, C_2, \ldots, C_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{115}$$

зависящих от n *произвольных постоянных* C_k, *такая что:*

1) *для любого фиксированного набора постоянных* C_k *совокупность* (115) *является решением (частным) системы* (113);

2) *для любых* $t_0 \in (a, b)$, $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}$, …, $y_n^{(0)}$ *можно подобрать такие значения* C_1°, C_2°, …, C_n°, *что соответствующее решение* (115) *будет удовлетворять условиям* (114), *т. е. будут выполнены равенства*

$$\varphi_i\left(t_0, C_1^\circ, C_2^\circ, \ldots, C_n^\circ\right) = y_i^{(0)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Для систем (113) разработано несколько методов интегрирования. Остановимся на самом простом — сведении системы к одному уравнению. Этот метод называется *методом исключения.* Другие методы см. [3, т. III, ч. 1; 6; 7; 8].

Пример 33. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = -4x + 2y + 5z, \\ y' = 6x - y - 6z, \\ z' = -8x + 3y + 9z. \end{cases} \tag{116}$$

Р е ш е н и е. Выражая z из первого уравнения

$$z = \frac{1}{5}\left(x' + 4x - 2y\right) \tag{117}$$

и дифференцируя его

$$z' = \frac{1}{5}\left(x'' + 4x' - 2y'\right),$$

подставляем эти выражения во второе и третье уравнения системы:

$$\begin{cases} y' = 6x - y - \dfrac{6}{5}\left(x' + 4x - 2y\right), \\ \dfrac{1}{5}\left(x'' + 4x' - 2y'\right) = -8x + 3y + \dfrac{9}{5}\left(x' + 4x - 2y\right), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{5}\left(-6x' + 6x + 7y\right), \\ x'' = 5x' + 2y' - 4x - 3y. \end{cases} \tag{118}$$

Исключая отсюда y':

$$x'' = 5x' + \frac{2}{5}\left(-6x' + 6x + 7y\right) - 4x - 3y,$$

выразим y:

$$y = -5x'' + 13x' - 8x. \tag{119}$$

Дифференцируя последнее равенство:

$$y' = -5x''' + 13x'' - 8x', \tag{120}$$

подставляем (119) и (120) в первое уравнение (118):

$$-5x''' + 13x'' - 8x' = \frac{1}{5}\left(-6x' + 6x - 35x'' + 91x' - 56x\right)$$

$$\text{или} \quad x''' - 4x'' + 5x' - 2x = 0. \tag{121}$$

Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$$

и находим его корни: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$. Согласно п. 11.1 общее решение уравнения (121) имеет вид

$$x = (C_1 + C_2 t)e^t + C_3 e^{2t}.$$

Отсюда, учитывая уравнение (119), получаем

$$y = 3C_2 e^t - 2C_3 e^{2t}.$$

Наконец, подставляя выражения x и y в уравнение (117), находим

$$z = (C_1 - C_2 + C_2 t)e^t + 2C_3 e^{2t}.$$

Итак, общее решение системы (116)

$$\begin{cases} x = (C_1 + C_2 t)e^t + C_3 e^{2t}, \\ y = 3C_2 e^t - 2C_3 e^{2t}, \\ z = (C_1 - C_2 + C_2 t)e^t + 2C_3 e^{2t}. \end{cases} \qquad \square$$

Решить системы дифференциальных уравнений:

91. $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = 2x + 4y. \end{cases}$ 92. $\begin{cases} x' = 5x + y, \\ y' = -17x - 3y. \end{cases}$

93. $\begin{cases} x' = 2x - y - z, \\ y' = 3x - 2y - 3z, \\ z' = -x + y + 2z. \end{cases}$ 94. $\begin{cases} x' = 2x - y + 2e^t, \\ y' = 3x - 2y + 4e^t. \end{cases}$

95. $\begin{cases} x' = y + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ y' = -x + \operatorname{tg} t. \end{cases}$

Контрольное задание №21

В каждом варианте решить систему дифференциальных уравнений методом исключения:

21.1. $\begin{cases} y' = 3y + 2z, \\ z' = 3y + 4z. \end{cases}$ 21.2. $\begin{cases} y' = 3y - 4z, \\ z' = y - 2z. \end{cases}$ 21.3. $\begin{cases} y' = 2y - z, \\ z' = 5y - 2z. \end{cases}$

21.4. $\begin{cases} y' = y - 2z, \\ z' = 7y - 8z. \end{cases}$ 21.5. $\begin{cases} y' = 3y - 2z, \\ z' = 2y - z. \end{cases}$ 21.6. $\begin{cases} y' = 4y - 2z, \\ z' = y + 2z. \end{cases}$

21.7. $\begin{cases} y' = 5y + 3z, \\ z' = y + 3z. \end{cases}$ 21.8. $\begin{cases} y' = 2y - z, \\ z' = 5y - 4z. \end{cases}$ 21.9. $\begin{cases} y' = 3y - z, \\ z' = 13y - 3z. \end{cases}$

21.10. $\begin{cases} y' = y - 3z, \\ z' = 7y - 9z. \end{cases}$ 21.11. $\begin{cases} y' = 5y - 3z, \\ z' = 3y - z. \end{cases}$ 21.12. $\begin{cases} y' = y - 9z, \\ z' = y + z. \end{cases}$

21.13. $\begin{cases} y' = 4y + z, \\ z' = 2y + 5z. \end{cases}$ 21.14. $\begin{cases} y' = 5y - 3z, \\ z' = 4y - 3z. \end{cases}$ 21.15. $\begin{cases} y' = y - 2z, \\ z' = 13y - z. \end{cases}$

21.16. $\begin{cases} y' = -5y + z, \\ z' = 2y - 4z. \end{cases}$ 21.17. $\begin{cases} y' = 6y - z, \\ z' = y + 4z. \end{cases}$ 21.18. $\begin{cases} y' = y - 2z, \\ z' = y + 3z. \end{cases}$

21.19. $\begin{cases} y' = y - 3z, \\ z' = 5y + 9z. \end{cases}$ 21.20. $\begin{cases} y' = 2y - z, \\ z' = 4y - 3z. \end{cases}$ 21.21. $\begin{cases} y' = 4y - 5z, \\ z' = 5y - 4z. \end{cases}$

21.22. $\begin{cases} y' = -7y + 3z, \\ z' = -y - 3z. \end{cases}$ 21.23. $\begin{cases} y' = 9y - 5z, \\ z' = 5y - z. \end{cases}$ 21.24. $\begin{cases} y' = y - 2z, \\ z' = 2y + z. \end{cases}$

21.25. $\begin{cases} y' = 8y - 3z, \\ z' = 2y + 3z. \end{cases}$ 21.26. $\begin{cases} y' = 2y + z, \\ z' = 4y - z. \end{cases}$ 21.27. $\begin{cases} y' = 2y - 5z, \\ z' = 4y - 2z. \end{cases}$

21.28. $\begin{cases} y' = -2y - 3z, \\ z' = 4y - 9z. \end{cases}$ 21.29. $\begin{cases} y' = 7y - 4z, \\ z' = 4y - z. \end{cases}$ 21.30. $\begin{cases} y' = y - z, \\ z' = y + z. \end{cases}$

§14. Автономные системы дифференциальных уравнений и их фазовые пространства

14.1. Автономные системы дифференциальных уравнений

Если f не содержит t в качестве аргумента, то система обыкновенных дифференциальных уравнений называется автономной:

$$y_i' = \frac{dy_i}{dt} = f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (122)$$

Каждому решению

$$y_i = \varphi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n\,, \tag{123}$$

автономной системы (122) поставим в соответствие движение точки в n-мерном пространстве (в отличие от § 13), задаваемое уравнениями (123), где y_1, y_2, ..., y_n — координаты точки в пространстве, а t — время. В процессе своего движения точка описывает некоторую кривую — *фазовую траекторию* движения. Фазовая траектория является проекцией на пространство переменных y_1, y_2, ..., y_n интегральной кривой в пространстве t, y_1, y_2, ..., y_n (рис. 11). Пространство размерности n, в котором интерпретируются решения автономной системы (122) в виде фазовых траекторий и автономная система в виде векторного поля, называется *фазовым пространством системы* (122).

t

O y_2

y_1

Рис. 11.

Положением равновесия системы (122) (или *особой точкой системы,* или *точкой покоя системы*) называется такая точка $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, в которой

$$f_i(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Пример 34. Для дифференциального уравнения

$$y' = (y-1)(y-2) \tag{124}$$

изобразить фазовые траектории на фазовой прямой.

Р е ш е н и е.

Способ 1. Это уравнение первого порядка. Найдем общий интеграл (см. §3):

$$\ln\left|\frac{y-2}{y-1}\right| = t + C_1$$

или

$$y = 1 + \frac{1}{1 - Ce^t}\,.$$

y

2

1

O t

Рис. 12.

0 1 2 y

Рис. 13.

Изобразим поле интегральных кривых на плоскости Oty (рис. 12). Здесь видно, что при $C > 0$ интегральные кривые заполняют области $y > 2$ и $y < 1$, а при $C < 0$ — область $1 < y < 2$. Частные решения $y = 1$ и $y = 2$ соответствуют значениям $C = \infty$ и $C = 0$. В зависимости от конкретного значения C картина будет смещаться вдоль оси Ot. Проектируя ее на ось Oy $\big($и поворачивая на $(-90^\circ)\big)$, получаем ***фазовый портрет*** уравнения (124) (рис. 13). Стрелки обозначают направление изменения $y(t)$ при увеличении $t \quad (t \to +\infty)$.

Способ 2. Правая часть уравнения (124) непрерывна, имеет непрерывную производную на всей прямой $\mathbb{R}$ изменения переменной y и обращается в нуль при $y = 1$ и $y = 2$. Эти точки являются положениями равновесия уравнения и, следовательно, представляют два решения уравнения (124). Фазовое пространство совпадает со всей прямой, положения равновесия разбивают ее на три интервала, каждый из которых дает фазовую траекторию. Направление указывает возрастание y (если $y' > 0$) или убывание y (если $y' < 0$) (рис. 13).

Положение равновесия $y = 1$ является *устойчивым*, а положение равновесия $y = 2$ — *неустойчивым*. $\square$

14.2. Фазовая плоскость

Чтобы построить траектории системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y' = f_1(y,z), \\ z' = f_2(y,z) \end{cases} \tag{125}$$

на *фазовой плоскости* Oyz, можно или исследовать непосредственно эту систему, или, разделив одно уравнение на другое, свести ее к дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{dz}{dy} = \frac{f_2(y,z)}{f_1(y,z)}\,. \tag{126}$$

Фазовые траектории системы (125) являются интегральными кривыми уравнения (126). Их можно построить, или решив уравнение (126) (часто оно решается проще, чем система (125)), или с помощью метода изоклин (см. §2), при этом необходимо исследовать положения равновесия системы (125) методами из п. 14.3.

Для построения траекторий уравнения второго порядка $y'' = f(y, y')$ на фазовой плоскости следует от этого уравнения перейти к системе

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = f(y,z), \end{cases}$$

которая исследуется так же, как система (125).

Пример 35. Для дифференциального уравнения второго порядка
$$y'' = y \tag{127}$$
построить траектории на фазовой плоскости.

Р е ш е н и е. Обозначим $y' = z$ и рассмотрим систему
$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = y, \end{cases} \tag{128}$$
которая сводится к дифференциальному уравнению первого порядка
$$\frac{dz}{dy} = \frac{y}{z}\,. \tag{129}$$
Общим интегралом (см. §3) уравнения (129) является семейство гипербол:
$$z^2 = y^2 + C.$$

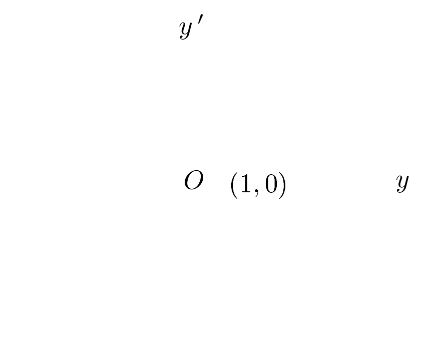

Рис. 14.

Для определения направления движения по траекториям рассмотрим вектор скорости $\left(\frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$ в точке $(1,0)$. В силу (128) он равен (z, y). В точке $(1,0)$ имеем $(0,1)$. Действуя аналогично и с другими траекториями, получаем *фазовый портрет* системы (128) и уравнения (127) (рис. 14). $\square$

14.3. Исследование положения равновесия линейной однородной системы с постоянными коэффициентами

Для исследования положения равновесия линейной однородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} y' = ay + bz, \\ z' = cy + gz \end{cases} \tag{130}$$

или уравнения

$$\frac{dz}{dy} = \frac{cy + gz}{ay + bz} \tag{131}$$

следует найти корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & g - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{132}$$

z z

O y O y

Рис. 15. Рис. 16.

Если корни (они же собственные числа матрицы коэффициентов системы (130)) λ_1, λ_2 вещественные, разные и одного знака, то положение равновесия — *устойчивый узел* (при $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, рис. 15; см. пример 38) или *неустойчивый узел* (при $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, рис. 16 и 28; см. примеры 39 и 36, соответственно); если разных знаков — *седло* (рис. 17; см. пример 40); если корни равные и ненулевые, то положение равновесия может быть *устойчивым вырожденным узлом* (рис. 18; см. пример 41) и *устойчивым дикритическим узлом* (при $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, рис. 19; см. пример 42) или может быть *неустойчивым вырожденным узлом* (рис. 20; см. пример 43) и *неустойчивым дикритическим узлом* (при $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, рис. 21; см. пример 44), причем дикритический узел имеет место только в случае системы

$$\begin{cases} y' = ay, \\ z' = az \end{cases}$$

или уравнения $\frac{dz}{dy} = \frac{z}{y}$. Если корни $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ — комплексные с вещественной частью, отличной от нуля, то положение равновесия — *устойчивый фокус* (при $\alpha < 0$, рис. 22 и 29; см. примеры 45 и 37 соответственно) или *неустойчивый фокус* (при $\alpha > 0$, рис. 23; см. пример 46); если чисто мнимые — *центр* (рис. 24; см. пример 47).

z $\qquad\qquad\qquad\qquad$ z

O $\qquad$ y $\qquad\qquad$ O $\qquad$ y

Рис. 17. $\qquad\qquad$ Рис. 18.

Если же один или оба корня уравнения (132) равны нулю, то $\begin{vmatrix} a & b \\ c & g \end{vmatrix} = 0$ и, следовательно, дробь в правой части уравнения (131) сокращается. Уравнение принимает вид $\frac{dz}{dy} = k$, и решения на плоскости Oyz изображаются параллельными прямыми

$$z = ky + C. \tag{133}$$

Все точки прямой

$$ay + bz = 0 \tag{134}$$

являются положениями равновесия. В случае $\lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 = 0$ движение происходит по прямым (133) в направлении к прямой (134)

z

O y

Рис. 19.

z

O y

Рис. 20.

z

O y

Рис. 21.

z

O y

Рис. 22.

z

O y

Рис. 23.

z

O y

Рис. 24.

(рис. 25), а в случае $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$ — по тем же прямым в направлении от прямой (134) (рис. 26).

Если же имеется единственное собственное значение $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то в случае, когда все коэффициенты системы (130) равны нулю, общее решение записывается в виде $\begin{cases} y = C_1, \\ z = C_2, \end{cases}$ где C_1 и C_2 — произвольные константы, и каждая точка плоскости Oyz является положением равновесия.

z $\quad$ O $\quad$ y

Рис. 25.

z $\quad$ O $\quad$ y

Рис. 26.

В случае, когда система (130) имеет вид $\begin{cases} y = bz, \\ z = 0, \end{cases}$ $b \neq 0$, общее решение записывается в виде

$$z = C_2, \quad y = C_1 + bC_2 t.$$

Движение происходит равномерно по каждой из прямых $z = \text{const}$. Все точки прямой $z = 0$ являются положениями равновесия (рис. 27).

Чтобы начертить интегральные кривые на плоскости в случае узла, седла и вырожденного узла, следует прежде всего найти те решения, которые изображаются прямыми, проходящими через особую точку. Эти прямые всегда направлены вдоль собственных векторов матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & g \end{pmatrix}$, составленной из коэффициентов данной системы (130). В случае узла кривые касаются той прямой, которая направлена вдоль собственного вектора, соответствующего *меньшему* по абсолютной величине значению λ.

В случае особой точки типа фокус требуется установить направление закручивания или раскручивания интегральных кривых. Для этого, во-первых, необходимо определить по знаку $\operatorname{Re}\lambda$ ***какой*** именно фокус, и, во-вторых, — в каком направлении вокруг положения равновесия происходит движение по траекториям (см. пример 37).

Аналогично исследуется направление движения в случае вырожденного узла.

z z

O y O y

Рис. 27. Рис. 28.

Пример 36. Исследовать положение равновесия $y = 0$, $z = 0$ системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y' = 3y + z, \\ z' = 4y + 3z. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Находим собственные значения и собственные векторы

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 5, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Числа λ_1, λ_2 вещественны, различны, положительны, поэтому положение равновесия — неустойчивый узел. По направлениям векторов $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ из точки $(0, 0)$ выходят прямолинейные траектории $z = -2y$, $\quad z = 2y$, а остальные траектории касаются прямой

$z = -2y$, так как $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ (рис. 28). Уравнения интегральных кривых на плоскости Oyz, являющихся параболами, имеют вид $2y + z = C(2y - z)^5$. При построении графиков с помощью компьютера удобно перейти к косоугольной системе координат с осями, направленными вдоль прямолинейных траекторий системы. $\square$

Пример 37. Исследовать положение равновесия $y = 0$, $z = 0$ системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y' = -y + 4z, \\ z' = -y - z. \end{cases} \tag{135}$$

z

$(1,0)$

O y

Рис. 29.

Р е ш е н и е. Находим собственные значения

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (\lambda+1)^2 + 4 = 0, \quad \lambda_{1,2} = -1 \pm 2i.$$

Положение равновесия — устойчивый фокус, так как $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} = -1 < 0$. Чтобы определить направление закручивания траекторий, строим в какой-нибудь точке, например в точке $(1,0)$, вектор скорости (y', z'). Из (135) при $y = 1$, $z = 0$ получаем вектор $(y', z') = (-1, -1)$. При возрастании t из точки (1,0) по направлению этого вектора выходит траектория; так как фокус устойчивый, то при $t \to +\infty$ она должна входить в точку $(0,0)$. Поэтому траектории закручиваются по часовой стрелке. Уравнения интегральных кривых на плоскости Oyz имеют вид

$$\ln \frac{y^2 + 4z^2}{C^2} = \operatorname{arctg} \frac{2z}{y}.$$

При их построении на компьютере удобно перейти к полярной системе координат ρ и φ: $\begin{cases} y = \rho \cos\varphi, \\ z = \rho \sin\varphi, \end{cases}$ в которой эти уравнения имеют вид (рис. 29)

$$\rho = C \sqrt{\frac{e^{\operatorname{arctg}(2 \operatorname{tg}\varphi)}}{1 + 3\sin^2\varphi}}. \quad \square$$

Пример 38. Исследовать положение равновесия $y = 0$, $z = 0$ системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y' = -y + \frac{3}{2} z, \\ z' = -2z. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Находим собственные значения и собственные векторы

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & \frac{3}{2} \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -1;$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Числа λ_1, λ_2 вещественны, различны, отрицательны, поэтому положение равновесия — устойчивый узел. По направлениям векторов $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ в точку $(0, 0)$ входят прямолинейные траектории $z = -2y$, $z = 0$, а остальные траектории касаются прямой $z = 0$, так как $|\lambda_2| < |\lambda_1|$ (см. рис. 15). Уравнения интегральных кривых на плоскости Oyz, являющихся параболами, имеют вид $z = C(2y + 3z)^2$. При построении графиков с помощью компьютера удобно перейти к косоугольной системе координат с осями, направленными вдоль прямолинейных траекторий системы. $\square$

Пример 39. Исследовать положение равновесия $y = 0$, $z = 0$ системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y' = y - \dfrac{1}{2}z, \\ z' = 2z. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Находим собственные значения и собственные векторы

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Числа λ_1, λ_2 вещественны, различны, положительны, поэтому положение равновесия — неустойчивый узел. По направлениям векторов $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ из точки $(0,0)$ выходят прямолинейные траектории $z = 0$, $z = -2y$, а остальные траектории касаются прямой $z = 0$, так как $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ (см. рис. 16). Уравнения интегральных кривых на плоскости Oyz, являющихся параболами, имеют вид $z = C(2y+z)^2$. При построении графиков с помощью компьютера удобно перейти к косоугольной системе координат с осями, направленными вдоль прямолинейных траекторий системы. □

Пример 40. Исследовать положение равновесия $y = 0$, $z = 0$ системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{1}{2}y + \dfrac{3}{4}z, \\ z' = 3y - \dfrac{1}{2}z. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Находим собственные значения и собственные векторы

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}-\lambda & \frac{3}{4} \\ 3 & -\frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 1,$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Числа λ_1, λ_2 вещественны, разных знаков, поэтому положение равновесия — седло. Так как $\lambda_1 < 0$, по направлению вектора $\mathbf{v}_1$ в точку $(0,0)$ входят прямолинейные траектории $z = -2y$, и так как $\lambda_2 > 0$, то по направлению вектора $\mathbf{v}_2$ (прямая $z = 2y$) — выходят (см. рис. 17). Уравнения интегральных кривых на плоскости Oyz, являющихся гиперболами, имеют вид $(2y - z)(2y + z)^2 = C$. При построении графиков с помощью компьютера удобно перейти к косоугольной системе координат с осями, направленными вдоль прямолинейных траекторий системы. $\square$

Пример 41. Исследовать положение равновесия $y = 0$, $z = 0$ системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y' = -y + 2z, \\ z' = -z. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Находим собственные значения и собственный вектор

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_{1,2} = -1, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Числа λ_1, λ_2 одинаковые, отрицательные и им соответствует *один* собственный вектор, поэтому положение равновесия — устойчивый вырожденный узел. Так как $\lambda_{1,2} < 0$, по направлению вектора $\mathbf{v}$ в точку $(0,0)$ входят прямолинейные траектории $z = 0$ (см. рис. 18). Уравнения интегральных кривых на плоскости Oyz имеют вид $y = z\big(C - 2\ln|z|\big)$. $\square$

Пример 42. Исследовать положение равновесия $y = 0$, $z = 0$ системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y' = -y, \\ z' = -z. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Находим собственные значения и собственные векторы

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_{1,2} = -1.$$

Числа λ_1, λ_2 одинаковые, отрицательные, и все ненулевые векторы плоскости являются собственными, поэтому положение равновесия — устойчивый дикритический узел. Так как $\lambda_{1,2} < 0$, по всем лучам в точку $(0,0)$ входят прямолинейные траектории

$Ay + Bz = 0$. (см. рис. 19). Уравнения интегральных кривых на плоскости Oyz имеют вид $z = Cy$. $\square$

Пример 43. Исследовать положение равновесия $y = 0$, $z = 0$ системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y' = y, \\ z' = 2y + z. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Находим собственные значения и собственный вектор

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_{1,2} = 1, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Числа λ_1, λ_2 одинаковые, положительные и им соответствует *один* собственный вектор, поэтому положение равновесия — неустойчивый вырожденный узел. Так как $\lambda_{1,2} > 0$, по направлению вектора $\mathbf{v}$ из точки $(0,0)$ выходят прямолинейные траектории $y = 0$ (см. рис. 20). Уравнения интегральных кривых на плоскости Oyz имеют вид $z = y\big(2\ln|y| + C\big)$. $\square$

Пример 44. Исследовать положение равновесия $y = 0$, $z = 0$ системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y' = 2y, \\ z' = 2z. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Находим собственные значения и собственные векторы

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_{1,2} = 2.$$

Числа λ_1, λ_2 одинаковые, положительные, и все ненулевые векторы плоскости являются собственными, поэтому положение равновесия — неустойчивый дикритический узел. Так как $\lambda_{1,2} > 0$, по всем лучам в точку $(0,0)$ входят прямолинейные траектории $Ay + Bz = 0$ (см. рис. 21). Уравнения интегральных кривых на плоскости Oyz имеют вид $z = Cy$. $\square$

Пример 45. Исследовать положение равновесия $y = 0$, $z = 0$ системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y' = -y + z, \\ z' = -y - z. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Находим собственные значения

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_{1,2} = -1 \pm i.$$

Положение равновесия — устойчивый фокус, так как $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} = -1 < 0$. Направление закручивания траекторий можно определить, построив в точке $(1,0)$ вектор скорости (y', z'). Подставляя $y = 1$, $z = 0$ в исходную систему, получаем вектор $(y', z') = (-1, -1)$. Вторая компонента этого вектора отрицательна, и это означает, что траектории закручиваются по часовой стрелке. Уравнения интегральных кривых на плоскости Oyz в полярной системе координат ρ и φ: $\begin{cases} y = \rho\cos\varphi, \\ z = \rho\sin\varphi \end{cases}$ имеют вид $\rho = e^{\varphi + C}$ (см. рис. 22). $\square$

Пример 46. Исследовать положение равновесия $y = 0$, $z = 0$ системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y' = y + 2z, \\ z' = -2y + z. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Находим собственные значения

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_{1,2} = 1 \pm 2i.$$

Положение равновесия — неустойчивый фокус, так как $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} = 1 > 0$. Направление закручивания траекторий можно определить, построив в точке $(1,0)$ вектор скорости (y', z'). Подставляя $y = 1$, $z = 0$ в исходную систему, получаем вектор $(y', z') = (1, -2)$. Вторая компонента этого вектора отрицательна, и это означает, что траектории раскручиваются по часовой стрелке. Уравнения интегральных кривых на плоскости Oyz в полярной системе координат ρ и φ: $\begin{cases} y = \rho\cos\varphi, \\ z = \rho\sin\varphi, \end{cases}$ имеют вид $\rho = e^{C - \frac{\varphi}{2}}$ (см. рис. 23). $\square$

Пример 47. Исследовать положение равновесия $y = 0$, $z = 0$ системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y' = y + z, \\ z' = -2y - z. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Находим собственные значения

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm i.$$

Положение равновесия — центр, так как собственные значения чисто мнимые: $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} = 0$. Направление закручивания траекторий можно определить, построив в точке $(1,0)$ вектор скорости (y',z'). Подставляя $y = 1$, $z = 0$ в исходную систему, получаем вектор $(y',z') = (1,-2)$. Вторая компонента этого вектора отрицательна, и это означает, что траектории закручиваются по часовой стрелке. Уравнения интегральных кривых на плоскости Oyz, являющихся эллипсами, имеют вид $y^2 + (y+z)^2 = C^2$. При их построении на компьютере удобно перейти к полярной системе координат ρ и φ: $\begin{cases} y = \rho\cos\varphi, \\ z = \rho\sin\varphi, \end{cases}$ в которой эти уравнения имеют вид $\rho = \frac{C}{\sqrt{1+\sin 2\varphi+\cos^2\varphi}}$ (см. рис. 24). □

Для данных дифференциальных уравнений построить фазовые траектории:

96. $y' = y^2$.
97. $y' = \sin y$.
98. $y'' + 4y = 0$.
99. $y'' + 3y' + 2y = 0$.
100. $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Исследовать положения равновесия указанных систем дифференциальных уравнений и изобразить их траектории на плоскости Oyz:

101. $\begin{cases} y' = 3y + 4z, \\ z' = 2y + z. \end{cases}$ 102. $\begin{cases} y' = z, \\ z' = -2y + z. \end{cases}$ 103. $\begin{cases} y' = 2y + 3z, \\ z' = y + 4z. \end{cases}$

104. $\begin{cases} y' = 2y, \\ z' = 2z. \end{cases}$ 105. $\begin{cases} y' = -2y - z, \\ z' = y. \end{cases}$

Контрольное задание №22

В каждом варианте построить фазовые траектории для дифференциального уравнения этого же варианта из контрольного задания №13.

Контрольное задание №23

В каждом варианте исследовать положение равновесия данной системы дифференциальных уравнений и изобразить ее фазовые траектории на плоскости Oyz.

23.1. $\begin{cases} y' = 3y - z, \\ z' = 13y - 3z. \end{cases}$ 23.2. $\begin{cases} y' = y - 3z, \\ z' = 7y - 9z. \end{cases}$ 23.3. $\begin{cases} y' = 5y - 3z, \\ z' = 3y - z. \end{cases}$

23.4. $\begin{cases} y' = y - 9z, \\ z' = y + z. \end{cases}$ 23.5. $\begin{cases} y' = 4y + z, \\ z' = 2y + 5z. \end{cases}$ 23.6. $\begin{cases} y' = 5y - 3z, \\ z' = 4y - 3z. \end{cases}$

23.7. $\begin{cases} y' = y - 2z, \\ z' = 13y - z. \end{cases}$ 23.8. $\begin{cases} y' = -5y + z, \\ z' = 2y - 4z. \end{cases}$ 23.9. $\begin{cases} y' = 6y - z, \\ z' = y + 4z. \end{cases}$

23.10. $\begin{cases} y' = y - 2z, \\ z' = y + 3z. \end{cases}$ 23.11. $\begin{cases} y' = y - 3z, \\ z' = 5y + 9z. \end{cases}$ 23.12. $\begin{cases} y' = 2y - z, \\ z' = 4y - 3z. \end{cases}$

23.13. $\begin{cases} y' = 4y - 5z, \\ z' = 5y - 4z. \end{cases}$ 23.14. $\begin{cases} y' = -7y + 3z, \\ z' = -y - 3z. \end{cases}$ 23.15. $\begin{cases} y' = 9y - 5z, \\ z' = 5y - z. \end{cases}$

23.16. $\begin{cases} y' = y - 2z, \\ z' = 2y + z. \end{cases}$ 23.17. $\begin{cases} y' = 8y - 3z, \\ z' = 2y + 3z. \end{cases}$ 23.18. $\begin{cases} y' = 2y + z, \\ z' = 4y - z. \end{cases}$

23.19. $\begin{cases} y' = 2y - 5z, \\ z' = 4y - 2z. \end{cases}$ 23.20. $\begin{cases} y' = -2y - 3z, \\ z' = 4y - 9z. \end{cases}$ 23.21. $\begin{cases} y' = 7y - 4z, \\ z' = 4y - z. \end{cases}$

23.22. $\begin{cases} y' = y - z, \\ z' = y + z. \end{cases}$ 23.23. $\begin{cases} y' = 3y + 2z, \\ z' = 3y + 4z. \end{cases}$ 23.24. $\begin{cases} y' = 3y - 4z, \\ z' = y - 2z. \end{cases}$

23.25. $\begin{cases} y' = 2y - z, \\ z' = 5y - 2z. \end{cases}$ 23.26. $\begin{cases} y' = y - 2z, \\ z' = 7y - 8z. \end{cases}$ 23.27. $\begin{cases} y' = 3y - 2z, \\ z' = 2y - z. \end{cases}$

23.28. $\begin{cases} y' = 4y - 2z, \\ z' = y + 2z. \end{cases}$ 23.29. $\begin{cases} y' = 5y + 3z, \\ z' = y + 3z. \end{cases}$ 23.30. $\begin{cases} y' = 2y - z, \\ z' = 5y - 4z. \end{cases}$

§15. Устойчивость положения равновесия

Пусть

$$y_i' = f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{136}$$

автономная система, и

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}) \tag{137}$$

ее векторная запись. Относительно функций $f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, будем предполагать, что они определены и имеют непрерывные частные производные первого и второго порядков в некоторой области Ω пространства $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Не давая формального определения *устойчивости по Ляпунову*,* остановимся на ее идее. Положение равновесия $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ уравнения (137) следует считать *устойчивым по Ляпунову*, если всякое решение уравнения (137), исходящее при $t = 0$ из точки, достаточно близкой к $\mathbf{a}$, остается в течение всего дальнейшего своего изменения (т. е. при $t > 0$) вблизи точки $\mathbf{a}$. Устойчивое по Ляпунову положение равновесия $\mathbf{a}$ уравнения (137) будет называться *асимптотически устойчивым*, если всякое решение уравнения (137), исходящее при $t = 0$ из точки, достаточно близкой к $\mathbf{a}$, будет приближаться к этому положению равновесия при $t \to +\infty$ сколь угодно близко (строгое определение см. в [2]).

Так, рассмотренные в п. 14.3 положения равновесия системы (130) *устойчивый фокус*, *устойчивый узел*, *устойчивый вырожденный узел* и *устойчивый дикритический узел* — являются асимптотически устойчивыми. Положение равновесия *центр* устойчиво по Ляпунову. Положения равновесия *седло*, *неустойчивый узел*, *неустойчивый вырожденный узел*, *неустойчивый дикритический узел*, *неустойчивый фокус* — являются неустойчивыми.

Связь между типами положений равновесия системы (130) и значениями корней характеристического уравнения (132) можно представить наглядно. Для этого введем обозначения $\sigma = -(a+g)$, $\Delta = ag - bc$. Тогда характеристическое уравнение запишется в виде $\lambda^2 + \sigma\lambda + \Delta = 0$.

Рассмотрим плоскость с прямоугольной декартовой системой координат Δ и σ и отметим на ней области, соответствующие различным типам положений равновесия (рис. 30; см. также рис. 62). Из приведенной выше классификации следует, что условия-

---

* А.М. Ляпунов (1857—1918) — русский математик и механик.

ми устойчивости положения равновесия являются $\operatorname{Re}\lambda_1 < 0$, $\operatorname{Re}\lambda_2 < 0$. Они выполняются при $\Delta > 0$ и $\sigma > 0$, т. е. для точек (Δ, σ), которые находятся в первой четверти. Если λ_1 и λ_2 — комплексные, то положение равновесия — типа фокуса. Этому условию удовлетворяют точки (Δ, σ), которые лежат между ветвями параболы $\sigma^2 = 4\Delta$ и не принадлежат оси $O\Delta$ (т. е. $\sigma^2 < 4\Delta, \quad \sigma \neq 0$).

Точки полуоси $\sigma = 0$, для которых $\Delta > 0$, соответствуют положениям равновесия типа центра.

Точки, расположенные вне параболы $\sigma^2 = 4\Delta \quad (\sigma^2 > 4\Delta > 0)$, соответствуют положениям равновесия типа узла.

Точки левой полуплоскости, где $\Delta < 0$, соответствуют положениям равновесия типа седла.

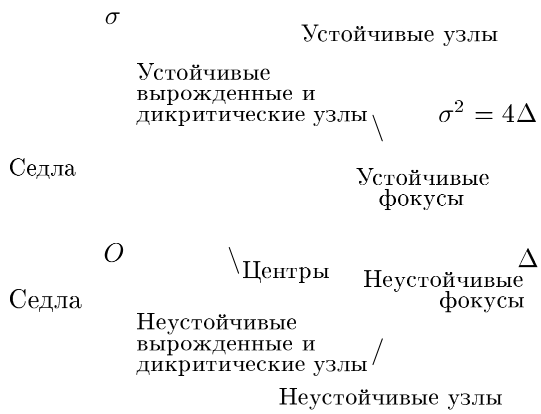

Рис. 30.

Исключая особые случаи (прохождение через начало координат), замечаем, что седло может перейти в узел устойчивый или неустойчивый (рис. 30). Устойчивый узел может перейти либо в седло, либо в устойчивый фокус. Случай равных корней $\lambda_1 = \lambda_2$ отвечает границе между узлами и фокусами, т. е. параболе $\sigma^2 = 4\Delta$.

Устойчивость положения равновесия **a** исследуется по **теореме Ляпунова**. Пусть все функции f_i, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ и $\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}$ непрерывны. Составим матрицу A из значений производных $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ в исследуемой точке **a**:

$$
\mathbf{A} = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}\right|_{\mathbf{y}=\mathbf{a}}.
$$

Если все собственные значения этой матрицы имеют отрицательные вещественные части, то положение равновесия асимптотически устойчиво, а если хотя бы одна из вещественных частей положительна, то неустойчиво [2].

Пример 48. Найти все положения равновесия системы дифференциальных уравнений

$$
\begin{cases} y' = z - y^2 - y, \\ z' = 3y - y^2 - z \end{cases} \tag{138}
$$

и каждое из них исследовать на устойчивость.

Р е ш е н и е. Положения равновесия определяются из системы

$$
\begin{cases} z - y^2 - y = 0, \\ 3y - y^2 - z = 0. \end{cases}
$$

Она имеет два решения $\begin{cases} y = 0, \\ z = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} y = 1, \\ z = 2. \end{cases}$ Матрица из частных производных от правых частей системы (138) имеет вид

$$
\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y - 1 & 1 \\ 3 - 2y & -1 \end{pmatrix}.
$$

Находим собственные значения матрицы при $y = 0, \quad z = 0$:

$$
A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 1 \\ 3 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}.
$$

Так как $-1 + \sqrt{3} > 0$, точка $(0, 0)$ неустойчива.

При $y = 1, \quad z = 2$ имеем

$$
A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -3 - \lambda & 1 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}.
$$

Так как $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 < 0$, точка $(1,2)$ асимптотически устойчива. $\square$

Для следующих систем дифференциальных уравнений найти все положения равновесия и каждое из них исследовать на устойчивость:

106. $\begin{cases} y' = (y-1)(z-1), \\ z' = yz - 2. \end{cases}$
107. $\begin{cases} y' = 3 - \sqrt{4 + y^2 + z}, \\ z' = \ln\left(y^2 - 3\right). \end{cases}$

108. $\begin{cases} y' = z, \\ z' = \sin(y+z). \end{cases}$
109. $\begin{cases} y' = e^z - e^y, \\ z' = \sqrt{3y + z^2} - 2. \end{cases}$

110. $\begin{cases} y' = y^3 - z, \\ z' = y + z^3. \end{cases}$

Контрольное задание №24

В каждом варианте найти все положения равновесия данной системы дифференциальных уравнений и каждое из них исследовать на устойчивость.

24.1. $\begin{cases} y' = 6y + y^2 - z, \\ z' = y + y^2 + 4z. \end{cases}$
24.2. $\begin{cases} y' = y + y^2 - 2z, \\ z' = y - y^2 + 3z. \end{cases}$

24.3. $\begin{cases} y' = y - 3z + z^2, \\ z' = 5y + 9z + z^2. \end{cases}$
24.4. $\begin{cases} y' = 2y - y^2 - z, \\ z' = 4y - y^2 - 3z. \end{cases}$

24.5. $\begin{cases} y' = 4y - 5z + yz, \\ z' = 5y - 4z + yz. \end{cases}$
24.6. $\begin{cases} y' = -7y + 3z - z^2, \\ z' = -y - 3z - z^2. \end{cases}$

24.7. $\begin{cases} y' = 2y - 5z - yz, \\ z' = 5y - z - yz. \end{cases}$
24.8. $\begin{cases} y' = y - y^2 - 2z, \\ z' = 2y + y^2 + z. \end{cases}$

24.9. $\begin{cases} y' = 8y - 3z - 7yz, \\ z' = 2y + 3z + 2yz. \end{cases}$
24.10. $\begin{cases} y' = 2y + z - z^2, \\ z' = 4y - z + z^2. \end{cases}$

24.11. $\begin{cases} y' = 2y - 5z + 3yz, \\ z' = 4y - 2z - 2yz. \end{cases}$
24.12. $\begin{cases} y' = -2y - 3z + z^2, \\ z' = 4y - 9z - z^2. \end{cases}$

24.13. $\begin{cases} y' = 7y + y^2 - 4z, \\ z' = 4y + y^2 - z. \end{cases}$ 24.14. $\begin{cases} y' = y - z + 2yz, \\ z' = y + z. \end{cases}$

24.15. $\begin{cases} y' = 3y - y^2 + 2z, \\ z' = 3y + y^2 + 4z. \end{cases}$ 24.16. $\begin{cases} y' = 3y - 4z + z^2, \\ z' = y - 2z + z^2. \end{cases}$

24.17. $\begin{cases} y' = 2y - z + yz, \\ z' = 5y - 2z + 3yz. \end{cases}$ 24.18. $\begin{cases} y' = y - 2z - z^2, \\ z' = 7y - 8z + z^2. \end{cases}$

24.19. $\begin{cases} y' = 3y - y^2 - 2z, \\ z' = 2y - y^2 - z. \end{cases}$ 24.20. $\begin{cases} y' = 4y - 2z + z^2, \\ z' = y + 2z - z^2. \end{cases}$

24.21. $\begin{cases} y' = 5y + y^2 + 3z, \\ z' = y - y^2 + 3z. \end{cases}$ 24.22. $\begin{cases} y' = 2y - z - yz, \\ z' = 5y - 4z - yz. \end{cases}$

24.23. $\begin{cases} y' = 3y - z + yz, \\ z' = 13y - 3z + 5yz. \end{cases}$ 24.24. $\begin{cases} y' = y - 3z - z^2, \\ z' = 7y - 9z - z^2. \end{cases}$

24.25. $\begin{cases} y' = 5y + y^2 - 3z, \\ z' = 3y + y^2 - z. \end{cases}$ 24.26. $\begin{cases} y' = y - 9z + z^2, \\ z' = y + z - z^2. \end{cases}$

24.27. $\begin{cases} y' = 4y - y^2 + z, \\ z' = 2y + y^2 + 5z. \end{cases}$ 24.28. $\begin{cases} y' = 5y - 3z + z^2, \\ z' = 4y - 3z + z^2. \end{cases}$

24.29. $\begin{cases} y' = y - y^2 - 2z, \\ z' = 13y - y^2 - z. \end{cases}$ 24.30. $\begin{cases} y' = -5y + z - yz, \\ z' = 2y - 4z + yz. \end{cases}$

§16. Составление дифференциальных уравнений

Математика для специалиста является инструментом решения профессиональных задач. Дифференциальные уравнения — один из важнейших таких инструментов. В исследовательской работе умение составить дифференциальное уравнение по условиям реальной задачи является даже более важным, нежели умение решить его, поскольку решение может быть получено с помощью компьютера. Составлению дифференциальных уравнений посвящена обширная литература, например работы [10—19].

Существует два основных метода составления дифференциальных уравнений: *метод производной* и *метод дифференциалов*.

Первый применяется в случае, когда можно установить закон изменения скорости изучаемого процесса; он приводит к уравнению, содержащему производную. Ко второму методу обращаются, если можно составить баланс притока и оттока каких-то величин (уравнение с дифференциалами). Эти методы взаимосвязаны.

Одной из замечательных особенностей природы является то, что разнообразные процессы могут описываться одним уравнением. Познакомимся с таким типом процессов.

Известно, что многие процессы в природе изменяют скорость именно пропорционально накопленному количеству вещества. Термин "количество вещества", конечно, условный — это может быть число особей в популяции, число журнальных статей, число нейтронов в ядерных реакторах, количество химического вещества, размер кристалла и т. п.

Определение. В начальный момент $t = 0$ имеется некоторое количество вещества y_0, и с течением времени оно увеличивается (или уменьшается). Если в каждый момент времени скорость процесса $v(t)$ пропорциональна накопленному (или оставшемуся) количеству вещества $y(t)$, т. е. если справедлив закон

$$v(t) = ay(t), \quad t \geqslant 0, \tag{139}$$

то этот процесс называется *естественным ростом.* Параметр a имеет свое фиксированное значение для каждого конкретного процесса и характеризует быстроту изменения скорости: чем меньше a, тем медленнее изменяется скорость.

Пример 49. Задача о естественном росте. В начальный момент имеется количество вещества y_0, и с течением времени оно изменяется по закону естественного роста (139). Найти формулу $y = y(t)$, по которой можно рассчитать количество вещества в любой момент $t \geqslant 0$.

Р е ш е н и е. Из определения скорости и определения производной следует, что $v(t) = y'(t)$. Характеристическое свойство (139) процесса превращается в дифференциальное уравнение

$$y' = ay. \tag{140}$$

Решая его методом из §3, находим общее решение $y = Ce^{at}$ и решение начальной задачи (**закон Мальтуса***)

$$y = y_0 e^{at}. \tag{141}$$

* Т.Р. Мальтус (T.R. Maltus, 1766—1834) — английский экономист и священник.

На рис. 31. изображены графики решений (141) при $a = 1$ и различных y_0. Видно, что чем больше вещества y_0 было в начале процесса, тем круче идет вверх график экспоненты, тем больше скорость процесса. На рис. 32 показан ход убывающих процессов при $a = -1$.

y

$y = y_0 e^t$

y_0

O 1 t

Рис. 31.

y

y_0

$y = y_0 e^t$

O 1 t

Рис. 32.

П р и м е ч а н и е. Решение реальной задачи свелось к решению математической задачи: найти частное решение уравнения (140), удовлетворяющее начальному условию $y(0) = y_0$. Подобные математические аналоги реальных задач называют *математическими моделями.* □

16.1. Биологические и экологические задачи

Пример 50. Задача об изолированной колонии микроорганизмов в идеальных условиях. Скорость размножения бактерий в идеальных условиях пропорциональна их числу. В начальный момент имелось 100 бактерий, а в течении трех часов их число удвоилось. Во сколько раз увеличится число бактерий в течение девяти часов?

Р е ш е н и е. Так как размножение бактерий является процессом естественного роста, то численность бактерий $y(t)$ удовлетворяет уравнению (140) и имеет вид (141) (закон Мальтуса). В этой

задаче
$$y = 100e^{at}.$$
Из условия имеем $200 = 100e^{3a}$ или $e^{3a} = 2$. Отсюда получаем $y(9) = 100e^{9a} = 100 \cdot 2^3 = 800$, т. е. за 9 часов число бактерий увеличится в 8 раз. $\square$

Пример 51. Найти зависимость между высотой места над уровнем моря и давлением воздуха.

Р е ш е н и е. Обозначим высоту места над уровнем моря через h и давление воздуха через p. Рассмотрим призматический столб воздуха, опирающийся на горизонтальную площадку единичной площади, расположенную на уровне моря.

Давление воздуха p в сечении этого столба на высоте h определяется весом части столба, опирающейся на указанное сечение. Увеличение высоты h на бесконечно малую величину dh влечет за собой уменьшение давления на бесконечно малую величину, измеряемую весом слоя воздуха между двумя сечениями (h) и $(h + dh)$. Следовательно, получается уравнение
$$-dp = S\,dh,$$
где S — вес воздуха в единичном объеме под давлением p (здесь пренебрегаем тем, что S меняется при переходе от нижнего сечения к верхнему), но величина S сама пропорциональна давлению, что вытекает из закона Бойля*—Мариотта** $(pV = p_0V_0)$, т. е. $S = kp$, где k — коэффициент пропорциональности. Подставляя это выражение для S в уравнение $-dp = S\,dh$, получаем
$$-dp = kp\,dh \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dp}{p} = -k\,dh.$$
Интегрируя последнее уравнение, находим
$$p = Ce^{-kh}.$$
Пусть $p = p_0$ при $h = 0$ (т. е. давление на уровне моря равно p_0), тогда $C = p_0$.

* Р. Бойль (R. Boyle, 1627—1691) — английский физик и химик.

** Э. Мариотт (A. Mariotte, 1620—1684) — французский физик.

Таким образом, искомая зависимость устанавливается формулой

$$p = p_0 e^{-kh}.$$

Коэффициент k определяется из дополнительных условий.

Решая полученное уравнение относительно h, получаем формулу

$$h = \frac{1}{k} \ln \frac{p_0}{p}\,, \tag{142}$$

позволяющую вычислить высоту h над уровнем моря по давлению воздуха p. $\square$

Пример 52. Закон охлаждения тела. Пусть тело в форме шара с массой m и постоянной теплоемкостью c имеет температуру T_1, а окружающая его среда — постоянную температуру T_0, причем $T_0 < T_1$. Требуется найти закон охлаждения тела при условии, что k — коэффициент пропорциональности количества теплоты, отданной телом за малое время $\Delta t = dt$, и разности температур тела и окружающей среды.

Р е ш е н и е. Во время охлаждения температура тела падает от T_1 до T_0. Допустим, что в момент времени t температура тела равна T и, следовательно, превышает температуру окружающей среды на $(T - T_0)$. Известно, что количество теплоты ΔQ, отданной телом за малое время $\Delta t = dt$, пропорционально разности температур тела и окружающей среды:

$$-\Delta Q \approx k(T - T_0)\Delta t = -dQ, \tag{143}$$

где k — постоянная.

Количество теплоты, отданной телом при охлаждении от T до T_0, определяется формулой $Q = mc(T - T_0)$. Продифференцировав это равенство: $dQ = mc\,dT$, подставим получившееся в (143):

$$-mc\,dT = k(T - T_0)dt.$$

Интегрируя, получаем

$$-\frac{mc}{k} \ln(T - T_0) = t + C.$$

Учитывая начальное условие $T = T_1$ при $t = 0$, находим $C = -\frac{mc}{k} \ln(T_1 - T_0)$ и, следовательно,

$$t = \frac{mc}{k} \ln \frac{T_1 - T_0}{T - T_0}\,.$$

Решая это уравнение относительно T, находим закон охлаждения тела:

$$T = T_0 + (T_1 - T_0)e^{-\frac{kt}{mc}}. \quad \square \tag{144}$$

Пример 53. Уравнение вентиляции. В помещении с объемом V под влиянием технологических процессов развиваются вредные выделения, концентрация которых за минуту составляет a. Вентиляторы приносят M м^3/мин свежего воздуха, причем приточный воздух содержит ту же "вредность" концентрации b. Найти формулу $y = y(t)$, по которой можно рассчитывать концентрацию вредных примесей в помещении в любой момент t. Начальное значение этой концентрации (остаток предыдущего дня) равно y_0.

M V M

Mb My

Va

Рис. 33.

Условие данной задачи несколько сложнее, чем условия предыдущих. Целостному восприятию помогает схема на рис. 33. Перечитайте задачу еще раз, смотря на эту схему (что означает Mb?).

Р е ш е н и е. Наша цель — найти концентрацию вредных примесей $y(t)$. Зададимся вопросом — от чего зависит значение $y(t)$? Какая причина того, что концентрация вредных примесей к моменту t принимает значение $y(t)$? Ясно, что это значение определяется соотношением между количеством вредных примесей внутри рабочего помещения и количеством притекающего свежего воздуха. Задача в том, чтобы выразить это соотношение точно.

Выделим малый временной интервал $(t, t + dt)$ и составим баланс притока и оттока вредных примесей за этот промежуток времени. Используя неизвестную пока функцию $y = y(t)$, можно сказать, что за время dt концентрация вредных примесей увеличится (или уменьшится) на величину $\Delta y \approx dy$.

Следовательно, общее количество вредных примесей изменится на величину $V\,dy$. Это приращение складывается из величины $Va\,dt$, которая создается за время dt в ходе технологических процессов, из небольшой величины $Mb\,dt$, которую привнес свежий воздух, минус $My\,dt$, что содержится в ушедшем из помещения при вентиляции воздухе (см. рис. 33). Заметим, что для определения последней величины опять используется неизвестная функция $y = y(t)$, ведь именно она дает концентрацию величины в рассматриваемый момент t.

Следовательно, баланс притока и оттока вредных примесей выглядит так:

$$V\,dy = Va\,dt + Mb\,dt - My\,dt. \tag{145}$$

Это не что иное как дифференциальное уравнение с неизвестной функцией $y = y(t)$. Оно называется *основным уравнением вентиляции.*

Найдем общее решение уравнения (145). Разделим переменные, учитывая, что V, M, a, b — постоянные (см. §3):

$$V\,dy = (Va + Mb - My)dt, \quad \frac{V\,dy}{(Va + Mb) - My} = dt.$$

Интегрируя обе части уравнения:

$$-\frac{V}{M}\ln\big|(Va + Mb) - My\big| = t + C_1,$$

запишем общее решение в явном виде:

$$y = \left(\frac{Va}{M} + b\right) - Ce^{-\frac{M}{V}t}.$$

Подставив в общее решение начальное условие $y(0) = y_0$, найдем значение постоянной C:

$$C = \left(\frac{Va}{M} + b\right) - y_0.$$

Окончательно решение задачи определяется функцией

$$y = \left(\frac{Va}{M} + b\right) + \left(y_0 - \left(\frac{Va}{M} + b\right)\right) e^{-\frac{M}{V}t}. \tag{146}$$

y

$A < y_0$

$A = y_0$

$A > y_0$

O t

Рис. 34.

На первый взгляд найденная функция (146) имеет сложное выражение. Но обратим внимание на выражения в скобках — ведь это константы, и, следовательно, перед нами функция вида $y = A + Be^{-kt}$. Такая функция имеет горизонтальную асимптоту $y = A$ при $t \to +\infty$. Этого достаточно, чтобы представить ход графиков (рис. 34).

В ы в о д ы. Основной вывод из решения (146): в процессе вентиляции концентрация вредных примесей асимптотически приближается к значению

$$A = \frac{Va}{M} + b. \tag{147}$$

Интересен и такой вывод: возможен случай, когда концентрация вредных примесей остается неизменной (рис. 34, $y_0 = A$). Согласитесь, что до получения ответа трудно было предположить такую возможность. Пользуясь формулой (147) можно рассчитать мощность вентиляторов M, которая обеспечит стабильный уровень загрязненности помещения, — достаточно найти M из уравнения

$$y_0 = \frac{Va}{M} + b.$$

И еще одна практическая ценность решения (146). Задача на практике ставится несколько иначе: обычно известны значения параметров V, a, b и y_0, а надо рассчитать мощность вентиляторов M, чтобы через определенное время t_1 уровень загрязненности не превышал заданной нормы y_1. Если подставить в решение все заданные параметры, включая $t = t_1$ и $y = y_1$, то оно превращается в алгебраическое уравнение, из которого и находится неизвестная M.

П р и м е ч а н и е. Обратим внимание на одно предположение, при котором составлялось дифференциальное уравнение (145) и которое, вероятно, осталось не замеченным. Предполагалось, что в каждый момент t концентрация вредных примесей одинакова во всех частях помещения, т. е. что перемешивание происходило мгновенно. Понятно, что в реальности это не так, и поэтому полученное теоретически решение будет давать значения концентрации, несколько отличающиеся от реальных. Но таково свойство любой модели, она моделирует реальность в главном, пренебрегая деталями. $\square$

Пример 54. Простейшая модель однородной популяции в реальных условиях. Колония организмов обитает в реальных природных условиях — конкурентная борьба внутри популяции, недостаток места и пищи, передача инфекции из-за тесноты и т. п. Найти закон изменения общего количества живых организмов в колонии.

Р е ш е н и е. Фактор самоотравления учитывается при расчете прироста популяции Δy путем уменьшения его на величину $h(y, \Delta t)$, характеризующую действительные условия существования колонии. Тогда уравнение прироста запишется в виде

$$\Delta y = ky\Delta t - h(y, \Delta t). \tag{148}$$

Без особой ошибки можно считать, что величина $h(y, \Delta t)$ линейно зависима от Δt, т. е.

$$h(y, \Delta t) = f(y)\Delta t.$$

Функцию $f(y)$ обычно считают квадратичной, т. е.

$$f(y) = \lambda y^2,$$

где λ — *коэффициент самоотравления* (или внутренней борьбы в популяции). Тогда

$$h(y, \Delta t) = \lambda y^2 \Delta t. \tag{149}$$

Эта величина значима по сравнению с $ky\Delta t$ только при больших значениях y. При малых y она становится бесконечно малой более высокого порядка малости. Поэтому зависимость (149) удовлетворительно отражает тот факт, что конкуренция внутри популяции начинает заметно ощущаться только при большой плотности, т. е. при больших значениях y на ограниченной площади. Кроме того, конкуренция увеличивается с ростом числа встреч между членами колонии, а оно пропорционально произведению yy, т. е. y^2. Подставляя (149) в уравнение (148), деля на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем уравнение

$$\frac{dy}{dt} = ky - \lambda y^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dt} = ky\left(\frac{\mu - y}{\mu}\right), \tag{150}$$

где $\mu = \frac{k}{\lambda}$.

К этому же уравнению придем, если будем рассматривать динамику популяции, считая, что показатели рождаемости и смертности являются обобщенными параметрами, характеризующими взаимодействие популяции с окружающей средой.

Если предположить, что популяция равномерно распределена в пространстве, все особи в популяции одинаковы, поколения перекрываются, а численность или плотность популяции $y(t)$ — непрерывная дифференцируемая функция, то динамика изменения $y(t)$ может быть описана уравнением

$$\frac{dy}{dt} = (B - D)y,$$

где B и D — рождаемость и смертность соответственно, которые в общем случае могут зависеть от y и t. В частном случае, при $B - D = \varepsilon = \text{const}$, получается закон экспоненциального роста численности популяции в неограниченной среде (*закон Мальтуса*) (см. пример 50).

Самая простая (для общего случая) форма зависимости между ε и y — линейная. Поэтому можно предполагать, что $\varepsilon = k - \lambda y$; $k, \lambda > 0$, и уравнение динамики популяции записывается в виде (150). Это широко известное в теории популяций *логистическое уравнение*; оно интегрируется методом из § 3.

Если $y_0 < \mu$, то для всех $t > 0$ будет $y(t) < \mu$, а после интегрирования имеем

$$\ln \frac{y}{\mu - y} = kt + \ln C \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{\mu - y} = Ce^{kt}.$$

Учитывая начальное условие $y(0) = y_0 < \mu$, находим

$$C = \frac{y_0}{\mu - y_0}\,,$$

и, следовательно,

$$\frac{y}{\mu - y} = \frac{y_0}{\mu - y_0} e^{kt}.$$

Отсюда получаем искомый закон (модель Ферхюльста*—Перла**):

$$y(t) = \frac{\mu y_0 e^{kt}}{\mu + y_0 \left(e^{kt} - 1\right)}\,. \tag{151}$$

Легко видеть, что $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = \mu$ (*равновесный размер*), т. е. численность популяции не возрастает беспредельно, а ограничена сверху.

График этого закона называют *логистической кривой* (ср. пример 66). Закон роста колонии показан на рис. 35 жирной линией, скорость роста — тонкой. □

Рассмотрим разные типы зависимости *коэффициента прироста* $\varepsilon = \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}$ от численности. На рис. 36 изображена монотонная зависимость (*1* — логистическое уравнение), на рис. 37 — немонотонная типа Олли***.

На рис. 38, 39 показаны фазовые диаграммы модели $\frac{dy}{dt} = \varepsilon(y)y$ при разных типах зависимости $\varepsilon(y)$ ($\circ$ — неустойчивая точка, $\bullet$ — устойчивая точка).

---

* П.Ф. Ферхюльст (P.F. Verhulst, 1804—1849) — бельгийский социолог и математик.

** Р. Перл (R. Pearl, 1879—1940) — американский биолог.

*** У.К. Олли (W.C. Allee, 1885—1955) — американский зоолог.

y

μ

$y(t)$

y_0

$\frac{dy}{dt}$

O t

Рис. 35.

$\varepsilon = \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}$

y^*

O y

2

1

3

Рис. 36.

$\varepsilon = \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}$

y_1^* y_2^* y_3^*

O y

Рис. 37.

$\frac{dy}{dt}$

y^*

O y

Рис. 38.

$\frac{dy}{dt}$

y_1^* y_2^* y_3^*

O y

Рис. 39.

Для исследования устойчивости положения равновесия y^* (см. §15) вычисляем производную

$$\frac{d}{dy}\big(\varepsilon(y)y\big) = \frac{d\varepsilon(y)}{dy}y + \varepsilon(y),$$

откуда в точке y^* получаем

$$\frac{d}{dy}\big(\varepsilon(y)y\big)\Big|_{y^*} = \frac{d\varepsilon(y^*)}{dy}y^*,$$

так как $\varepsilon(y^*) = 0$. Следовательно, в первом случае $\varepsilon(y)$ монотонно уменьшается с ростом y. Каково бы ни было ненулевое начальное значение численности, популяция стремится к состоянию y^*, так как $\frac{d\varepsilon}{dy} < 0$ (см. §15). Во втором случае $\varepsilon(y)$ — немонотонная кривая Олли. Если $y_0 \in (0, y_2^*)$, то популяция стремится к состоянию y_1^*, так как $\frac{d\varepsilon}{dy}(y_1^*) < 0$ и $\frac{d\varepsilon}{dy}(y_2^*) > 0$, а если $y_0 \in (y_2^*, +\infty)$, — то к состоянию y_3^*, так как $\frac{d\varepsilon}{dy}(y_3^*) < 0$.

Из этих графиков видно, что в любом случае состояние с нулевой численностью неустойчиво. Для монотонных зависимостей первого типа единственное нетривиальное стационарное состояние устойчиво (в частности, устойчиво предельное значение численности $y_\infty = \mu$ в логистической модели). Если же зависимость $\varepsilon(y)$ изображается кривой Олли, то возникают три нетривиальных стационарных состояния, причем y_1^* и y_3^* (с наименьшей и наибольшей численностями) устойчивы, а y_2^* (с промежуточным значением численности) неустойчиво.

Наличие двух различных устойчивых стационарных состояний в популяциях, для которых характерна зависимость типа Олли, может быть интерпретировано как возникновение некоторой новой формы адаптации к окружающей среде, позволяющей популяции увеличить свой размер или, другими словами, расширить "емкость" среды.

Пример 55. Классическая модель Вольтерры*—Лотки.** Пусть $z(t)$ и $y(t)$ — численности жертв и хищников соответственно. Предположим, что единственным лимитирующим фактором, ограничивающим размножение жертв, является давление на

---

* В. Вольтерра (V. Volterra, 1860—1940) — итальянский математик.

** А.Д. Лотка (A.J. Lotka, 1880—1949) — американский биолог.

них со стороны хищников, а размножение хищников ограничивается количеством добытой ими пищи (числом жертв). Тогда в отсутствие хищников численность жертв должна расти экспоненциально с относительной скоростью α, а хищники в отсутствие жертв — также экспоненциально вымирать с относительной скоростью m. Коэффициенты α и m — коэффициенты естественного прироста жертв и естественной смертности хищников соответственно.

Пусть $V = V(z)$ — количество (или биомасса) жертв, потребляемых одним хищником за единицу времени, причем k-я часть полученной с этой биомассой энергии расходуется хищником на воспроизводство, а остальное тратится на поддержание основного обмена и охотничьей активности. Тогда уравнения системы хищник — жертва можно записать в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = \alpha z - V(z)y, \\ \dfrac{dy}{dt} = y\big(kV(z) - m\big). \end{cases} \tag{152}$$

При малых значениях z, например, когда трофические отношения в системе напряжены и почти все жертвы становятся добычей хищника, который всегда голоден, и насыщения не наступает (ситуация довольно обычная в природе), трофическую функцию $V(z)$ можно считать линейной функцией численности жертв, т. е. $V(z) = \beta z$. Кроме того, предположим, что $k = \text{const}$. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = \alpha z - \beta zy, \\ \dfrac{dy}{dt} = k\beta zy - my. \end{cases} \tag{153}$$

В. Вольтерра показал, что эта система имеет интеграл вида

$$\left(\frac{e^Z}{Z}\right)^m \left(\frac{e^Y}{Y}\right)^\alpha = C, \tag{154}$$

где $Z = \frac{z}{z^*}$, $Y = \frac{y}{y^*}$, $z^* = \frac{m}{k\beta}$, $y^* = \frac{\alpha}{\beta}$. Если z_0 и y_0 — начальные значения численности жертв и хищников соответственно, то

$$C = \left(\frac{e^{z_0/z^*}}{z_0/z^*}\right)^m \left(\frac{e^{y_0/y^*}}{y_0/y^*}\right)^\alpha > 0,$$

и уравнение (154) описывает семейство вложенных друг в друга замкнутых кривых, изображенных на рис. 40 (при построении графиков на компьютере приближенное решение уравнения $\frac{e^z}{z} - A = 0$ получено методом Ньютона* (см., например, [26]); для определенности полагались $m = \alpha = 1$ и $y^* = z^*$). Эти кривые являются фазовыми траекториями периодических решений системы (153). При $\min C = C^* = e^{m+\alpha}$ кривые стягиваются в точку (z^*, y^*).

y $\quad$ y^* $\quad$ C_1 $\quad$ C_2 $\quad$ C_3 $\quad$ $C_1 < C_2 < C_3$ $\quad$ O $\quad$ z^* $\quad$ z

Рис. 40.

$y,\, z$ $\quad$ y_0 $\quad$ $y^* = z^*$ $\quad$ z_0 $\quad$ $y(t)$ $\quad$ $z(t)$ $\quad$ O $\quad$ t

Рис. 41.

Неэллиптическая форма траекторий этого нелинейного центра отражает негармонический характер колебаний численности популяций (рис. 41). Обратите внимание на то, что функция $y(t)$ достигает экстремумов в те моменты, когда $z(t) = z^*$, а функция $z(t)$ — в те моменты, когда $y(t) = y^*$. $\square$

Пример 56. Скорость увеличения площади молодого листа виктории–регии, имеющего форму круга, пропорциональна диаметру листа и энергии солнечного света, падающего на него. Последняя пропорциональна площади листа и косинусу угла α между направлением солнечных лучей и нормалью к листу. Для дня весеннего равноденствия найти зависимость между площадью S листа виктории–регии, растущей на экваторе в реке Амазонке, и временем t, если в 6 часов утра эта площадь равнялась 1600 см^2, а в 18 часов того же дня — 2500 см^2 (задача взята из сборника [5]).

---

* И. Ньютон (I. Newton, 1643—1727) — английский физик, механик, астроном и математик.

П р и м е ч а н и е 1. Виктория–регия — водное растение, лист которого плавает на поверхности воды, т. е. нормаль к нему направлена по вертикали.

П р и м е ч а н и е 2. В дни равноденствий на экваторе путь Солнца проходит через зенит, причем в 6 часов утра происходит восход Солнца, т. е. угол $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, в полдень (12 часов) Солнце достигает зенита, т. е. $\alpha = 0$, а в 18 часов Солнце заходит, т. е. $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Р е ш е н и е. Пусть t — время в часах, отсчитываемое от полуночи.

Если S — переменная площадь листа, то скорость роста листа

$$\frac{dS}{dt} = k_1 DQ,$$

где D — диаметр листа, Q — энергия солнечного света, k_1 — коэффициент пропорциональности.

Площадь листа $S = \frac{\pi D^2}{4}$, откуда

$$D = 2\sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

Тогда

$$\frac{dS}{dt} = k_1 2\sqrt{\frac{S}{\pi}}Q. \tag{155}$$

По условию

$$Q = k_2 S \cos\alpha, \tag{156}$$

где k_2 — коэффициент пропорциональности.

Солнце движется по небосводу равномерно, поэтому угол α является линейной функцией времени t:

$$\alpha = k_3 t + b.$$

Параметры k_3 и b определяются из трех дополнительных условий:

$$\begin{aligned} &\text{при } t = 6 \text{ ч} \quad \alpha = -\frac{\pi}{2}, \\ &\text{при } t = 12 \text{ ч} \quad \alpha = 0, \\ &\text{при } t = 18 \text{ ч} \quad \alpha = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Из первых двух условий имеем

$$\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} = 6k_3 + b, \\ 0 = 12k_3 + b. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем

$$k_3 = \frac{\pi}{12}, \quad b = -\pi,$$

т. е.

$$\alpha = \frac{\pi}{12}(t - 12).$$

Проверка по третьему условию дает равенство

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{12} \cdot 18 - \pi.$$

Значение α подставляем в равенство (156), откуда

$$Q = k_2 S \cos\left(\frac{\pi}{12}(t - 12)\right).$$

Полученное значение Q подставляем в уравнение (155):

$$\frac{dS}{dt} = 2k_1 k_2 \sqrt{\frac{S}{\pi}} S \cos\left(\frac{\pi}{12}(t - 12)\right).$$

Вводим обозначение $k = k_1 k_2$. Тогда после разделения переменных (см. §3) имеем

$$\frac{dS}{S\sqrt{S}} = \frac{2k}{\sqrt{\pi}} \cos\left(\frac{\pi}{12}(t - 12)\right) dt.$$

Интегрируя, получаем

$$-\frac{2}{\sqrt{S}} = \frac{24k}{\pi\sqrt{\pi}} \sin\left(\frac{\pi}{12}(t - 12)\right) + C. \tag{157}$$

Известно, что при $t = 6$ ч площадь $S = 1600$ см^2, а при $t = 18$ ч ее значение $S = 2500$ см^2.

Отсюда

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{20} = -\dfrac{24k}{\pi\sqrt{\pi}} + C, \\ -\dfrac{1}{25} = \dfrac{24k}{\pi\sqrt{\pi}} + C. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим

$$C = -\frac{9}{200}\,, \quad k = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{4800}\,. \tag{158}$$

Подставляя полученные значения (158) в равенство (157), получаем

$$-\frac{2}{\sqrt{S}} = \frac{1}{200}\sin\left(\frac{\pi}{12}(t-12)\right) - \frac{9}{200}\,,$$

Откуда

$$S = \frac{160000}{\left(9 - \sin\left(\frac{\pi}{12}(t-12)\right)\right)^2}\,. \quad \square$$

Решить задачи:

111. Шар с начальной температурой 100° C находится на воздухе, температура которого 20° C. Шар охлаждается в течение 20 минут до 60° C. Найти его температуру через один час после охлаждения.

112. **Размножение микроорганизмов.** Известно, что колония микроорганизмов с массой в начале опыта $m_0 = 0.05$ г через два часа имела массу $m_2 = 0.06$ г. Найти массу этой колонии через три часа, считая, что возрастание массы происходит пропорционально самой массе.

113. В популяции фруктовых вредителей, а также некоторых колоний бактерий скорость вымирания пропорциональна *квадрату* наличного числа особей с коэффициентом пропорциональности k_2. Скорость рождения пропорциональна наличному числу особей с коэффициентом k_1. Считая, что в начальный момент $t = 0$ популяция насчитывает y_0 особей, найти функцию $y(t)$ — число особей в момент t. Сделать прогноз, при каком соотношении между $\frac{k_1}{k_2}$ и y_0 популяция растет, при каком убывает. Может ли она стать вымирающей? Что можно сказать о динамике популяции при $t \to +\infty$?

114. Пусть в некоторой среде имеются условия, благоприятные для жертв, т. е. численность их растет пропорционально числу имеющихся особей. В момент, когда жертв стало достаточно много, появились хищники. Часть жертв будет съедена, и численность их уменьшится. Найти закон изменения численности жертв.

115. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 - x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

описывает взаимное влияние популяций двух конкурирующих видов на скорость их роста. Допустим, что начальные популяции $x_1(0)$ и $x_2(0)$ состоят соответственно из 100 и 200 особей. Найти численность обоих видов в момент t.

116. Составить математическую модель кооперации двух видов популяций, если численность популяции каждого вида возрастает пропорционально численности популяции другого вида (коэффициенты пропорциональности соответственно 4 и 1) и убывает пропорционально собственной численности (коэффициент пропорциональности 2). Найти численность популяций в момент t, если начальные популяции состояли соответственно из 100 и 300 особей.

117. Колония бактерий увеличивается пропорционально ее численности, но выделяемый бактериями яд истребляет их пропорционально числу бактерий и массе яда. Предполагая, что скорость выработки яда пропорциональна численности колонии, составить математическую модель процесса. Показать, что число бактерий, сначала возрастающее до некоторого значения, а затем убывающее до нуля, в момент t определяется формулой $N = \frac{4M}{(e^{kt}+e^{-kt})^2}$, где M — наибольшее число бактерий, а время t измеряется с того момента, когда $N = M$.

118. Популяция из n особей подвергается воздействию редкого инфекционного заболевания. В момент времени t она состоит из $x_1(t)$ восприимчивых особей, $x_2(t)$ заражаемых, контактирующих с другими, и $x_3(t)$ изолированных или обладающих иммунитетом. Математическая модель распространения этого заболевания

задается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -ax_1(0)x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \big(ax_1(0) - b\big)x_2, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = bx_2, \end{cases}$$

где a и b — положительные постоянные, отражающие скорости, с какими заражаются восприимчивые особи и зараженные изолируются или приобретают иммунитет. Найти решение системы, если $x_1(0) = \alpha, \quad x_2(0) = \beta, \quad x_3(0) = \gamma$, где α, β и γ — число соответствующих особей в начальный момент $t = 0$.

119. В помещении цеха объемом 10800 м^3 после рабочего дня воздух содержит 0.12% углекислого газа (т. е. концентрация вредных примесей 0.0012). Вентиляторы приносят M м^3 свежего воздуха в минуту и он содержит 0.04% углекислоты. Составить уравнение вентиляции с неопределенным пока параметром M $\big($в чем отличие его от уравнения (145)?$\big)$. Найти его общее решение. Определить начальное условие задачи и найти частное решение. Используя частное решение, ответить на вопрос, какова должна быть мощность вентиляторов M, чтобы через 10 минут содержание углекислоты в цехе не превышало 0.06% (учесть, что $\ln 4 = 1.3863$).

120. В цехе объемом 10000 м^3 вентиляторы приносят в минуту 1000 м^3 свежего воздуха. В 8 часов утра в цех входят рабочие, и через полчаса содержание углекислоты повышается до 0.12%. Найти, какой процент углекислоты следует ожидать в 13 часов, если в начале дня он был равен 0.04%.

16.2. Физические и химические задачи

Пример 57. Радиоактивный распад. Радиоактивным распадом называется самопроизвольное превращение ядер некоторых элементов (радона, радия, урана и др.) в ядра других, более легких элементов. Этот процесс сопровождается излучением энергии, и с течением времени количество вещества уменьшается. Процесс медленный, даже очень медленный — для радона должно пройти 3.82 суток, чтобы осталась половина первоначального количества вещества, для радия — 1590 лет (*период полураспада*). Скорость процесса медленно уменьшается, причем установлено, что это изменение подчиняется закону (139).

Для радия коэффициент $a = -0.000436$, и решение (141), определяющее количество нераспавшегося вещества к моменту времени t (t определяется в годах), выглядит так:

$$y = y_0 e^{-0.000436t}. \qquad (159)$$

Данная функция очень медленно убывает. Чтобы это стало понятным, положим $t = 2500$ лет и найдем значение $y(2500) \approx y_0 e^{-1} \approx \approx 0.37 y_0$. На рис. 42 график функции (159) идет почти параллельно оси Ox, и чтобы он опустился до 0.37%, нужно дойти до $t = 2500$. На том же рисунке показаны еще два графика для иллюстрации характера изменения экспоненты при уменьшении a.

y y_0 $y = y_0 e^{-0.000436t}$ $y = y_0 e^{-0.1t}$ $y = y_0 e^{-t}$ O 1 t

Рис. 42.

y m O t

Рис. 43.

С л е д с т в и е. Во-первых, процесс не имеет конца! Потому что показательная функция (159) положительна при любых значениях $t: \quad y(t) > 0$.

Во-вторых, для того чтобы осталась половина исходного количества радия $0.5y_0$, должно пройти 1590 лет. Расчет такой:

$$0.5y_0 = y_0 e^{aT}, \quad aT = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2,$$

$$T = \frac{-\ln 2}{a} \approx \frac{-0.6932}{-0.000436} \approx 1590. \qquad \square$$

Пример 58. Модель химической реакции. Составить дифференциальное уравнение очень легко, если известно, как связана скорость процесса с искомой функцией. Ответ на этот вопрос дает не математика, а та специальная область науки, к которой относится задача. Проследим это на примере задачи из области химии, где постоянно возникает проблема определения скорости реакции. Как правило, скорость убывает со временем, однако не пропорционально искомой функции. Вместе с тем химические процессы близки к естественному росту, и решения получаются также с помощью экспонент e^{at}.

Химическая реакция состоит в том, что одно или несколько веществ–реагентов A, B, ... соединяются при определенных условиях и образуют новое вещество W. Этот процесс происходит не моментально: какое-то количество нового вещества образуется в первую тысячную секунды, еще некоторое — в следующую долю секунды и т. д. Количество нового вещества, следовательно, возрастает со временем. Естественно возникают вопросы: как быстро возрастает? до каких пределов может дойти рост?

Скорость реакции — это скорость образования нового вещества, приближенно — прирост вещества в единицу времени. Во многих простых реакциях скорость подчиняется закону, известному под названием *закона действия масс*: скорость реакции пропорциональна произведению реагирующих масс, т. е. тех количеств веществ A, B ..., которые к данному моменту времени еще не вступили в соединение. Поскольку количества реагирующих веществ уменьшаются, то и скорость реакции убывает. Рассмотрим наиболее простой случай, когда реагирует *одно* вещество.

Пусть имеется химическое вещество A массой m грамм. В результате химической реакции оно переходит в другое вещество W. Реакция подчиняется закону действия масс. Термин "переходит" означает, что сколько вещества A к моменту t убывает, столько образуется нового вещества W. Найти формулу $y = y(t)$ $\big($очевидно, $y(t) \leqslant m\big)$, по которой можно рассчитать количество образовавшегося вещества к любому моменту времени.

Р е ш е н и е. Закон действия масс для одного реагента гласит, что скорость реакции пропорциональна оставшемуся на момент t количеству вещества A, т. е. $v(t) = k\big(m - y(t)\big)$. Поскольку скорость реакции есть скорость роста искомой функции, то $v(t) = y'(t)$, и приходим к дифференциальному уравнению

$$y' = k(m - y). \tag{160}$$

Разделяя переменные (см. § 3), находим общее решение:

$$y = m + Ce^{-kt}.$$

В начальный момент $t = 0$ вещества W не было, следовательно, искомая функция должна удовлетворять условию $y(0) = 0$. Подставляя это начальное условие в общее решение, находим значение $C = -m$. Окончательно решение задачи дает функция

$$y = m\left(1 - e^{-kt}\right). \tag{161}$$

График решения (161) показан на рис 43. Видно, что решение (161) имеет горизонтальную асимптоту. Отсюда следует: 1) реакция никогда не закончится; 2) количество нового вещества асимптотически приближается к m. $\square$

Пример 59. Цилиндрический котел с вертикальной осью имеет высоту 6 м и диаметр 4 м. В дне котла имеется отверстие с диаметром $\frac{1}{6}$ м. Найти, за какое время вытечет из котла вся имеющаяся там вода.

Р е ш е н и е. Для решения этого примера и задач 124 и 125 необходимо воспользоваться законом Торричелли*. По этому закону скорость истечения жидкости из отверстия в момент времени t равна скорости, которую приобретает свободно падающее тело, пройдя расстояние, равное высоте столба жидкости над отверстием в момент t. Выберем систему координат так, чтобы ось Ox совпадала с осью рассматриваемого сосуда, а ось Oy лежала в плоскости, с которой совпадает поверхность жидкости в начале процесса. Ось Ox направим вертикально вниз (рис. 44). Согласно закону Торричелли имеем

$$v_1 = \sqrt{2g(h - x)}, \tag{162}$$

где h — начальная высота жидкости, x — уровень жидкости в момент t. Пусть за время dt вытекает dQ жидкости. Тогда, обозначая v_1 скорость вытекания через отверстие с площадью поперечного сечения m, получаем $dQ = mv_1 dt$. За это же время dt

* Э. Торричелли (E. Torricelli, 1608—1647) — итальянский математик и физик.

уровень жидкости в сосуде понизится. Обозначим скорость снижения уровня через v, тогда высота снижения будет равна $v\,dt$, а объем жидкости уменьшится на величину $Sv\,dt$, где S — площадь поверхности жидкости. Исходя из приведенных рассуждений, имеем $Sv\,dt = mv_1\,dt$, т. е. $v = \frac{mv_1}{S}$. Если использовать (162), то последнее уравнение примет вид

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\mu m}{S}\sqrt{2g(h-x)}, \tag{163}$$

где μ — коэффициент истечения, принимающий в зависимости от вида отверстия значения от 0.6 до 0.97.

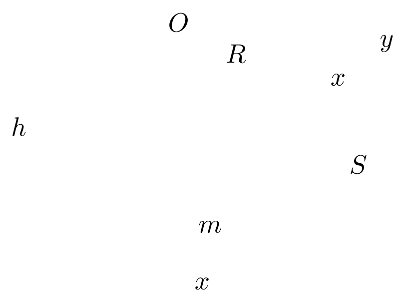

Рис. 44.

В нашем примере $S = \pi R^2 = 4\pi$, $m = \frac{\pi}{144}$, $\mu = 0.6$, $h = 6$; уравнение (163) принимает вид $k\,dx = \sqrt{6-x}\,dt$, где $k = \frac{576}{0.6\sqrt{2g}}$. Интегрируя при условии $x(0) = 0$, получаем $t = 2k\left(\sqrt{6} - \sqrt{6-x}\right)$. При $x = 6$ время $t = 17.7$ мин. $\square$

Пример 60. Из некоторого химического вещества добывают серу растворяя ее в бензоле. Было найдено, что с помощью очень большого количества бензола удается за 42 минуты добыть половину всего, имеющегося в наличии, количества серы. Определить, сколько можно растворить серы в течении 6 часов, если в данном веществе содержится 6 г серы и если взять 100 г бензола, — количество, которое при насыщении растворяет 11 г серы.

Р е ш е н и е. В этой задаче следует считать, что скорость растворения пропорциональна наличному количеству нерастворенного вещества и разности между концентрацией насыщенного раствора c и концентрацией раствора в данный момент времени c_t. Пусть объем раствора равен V, а масса нерастворенного вещества M. Если обозначить через x количество нерастворенного вещества к моменту t, то $c_t = \frac{M-x}{V}$. Согласно предыдущему получаем

$$\frac{dx}{dt} = kx\left(c - \frac{M-x}{V}\right).$$

Отделяя переменные и интегрируя, получаем

$$\frac{x}{x-M+cV} = Ae^{\left(c-\frac{M}{V}\right)kt}.$$

Величину A определяем из условия: $x = M$ при $t = 0$, т. е. $A = \frac{M}{cV}$. Итак,

$$\frac{x}{x-M+cV} = \frac{M}{cV}e^{\left(c-\frac{M}{V}\right)kt}. \tag{164}$$

По условию задачи имеем $c = 0.11$ и $x = \frac{1}{2}M$ при $t = 42$, $V = +\infty$. Подставляя эти значения в уравнение (164), получаем $0.5 = e^{4.62k}$, откуда $k = -0.15$. Тогда уравнение (164) принимает вид

$$\frac{0.11Vx}{x-M+0.11V} = Me^{-0.15\left(0.11-\frac{M}{V}\right)t}.$$

Так как при $t = 6$ ч $= 360$ мин значения $M = 6$, $\quad V = 100$, то

$$\frac{x}{x+5} = \frac{6}{11}e^{-2.7},$$

откуда $x = 0.19$ г. $\square$

Итак, как было показано, построение математических моделей разнообразных задач из области естествознания приводит к дифференциальным уравнениям первого порядка. В этих задачах требуется установить зависимость между переменными величинами некоторого физического, химического, биологического или другого процесса.

При решении таких задач необходимо:

1) составить дифференциальное уравнение по условию задачи, т. е. соотношение, связывающее независимую переменную t, трактуемую чаще всего как время, искомую функцию $x(t)$ и скорость ее изменения $\frac{dx}{dt}$;

2) определить тип полученного уравнения и выбрать метод его решения;

3) найти общее решение уравнения;

4) получить частное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям;

5) в случае необходимости вычислить значения вспомогательных параметров (коэффициента пропорциональности и др.), входящих в общее решение дифференциального уравнения;

6) найти, если это требуется, численные значения искомых величин.

При составлении дифференциальных уравнений используется геометрический или механический смысл производной; кроме того, в зависимости от условия задачи применяются соответствующие законы физики, механики, химии, биологии и других наук.

Пример 61. Некоторое радиоактивное вещество, начальная масса которого m_0, дает два продукта распада, каждый с разной скоростью. Известно, что скорость образования каждого продукта пропорциональна массе присутствующего исходного вещества. Найти зависимость количества первого и второго продукта распада от времени и закон превращения исходного вещества. Решить задачу при следующих данных: $m = m_0 = 10$ при $t = 0$, количества первого и второго продуктов распада равны нулю; $m = 5$ при $t = 3$, количество первого продукта распада равно 4, второго 1.

Р е ш е н и е. Пусть к моменту t масса присутствующего вещества равна m, а количество первого и второго продукта — соответственно x и y. По условию задачи имеем

$$\frac{dx}{dt} = k_1 m, \quad \frac{dy}{dt} = k_2 m, \tag{165}$$

где k_1 и k_2 — коэффициенты пропорциональности. Деля второе уравнение на первое, приходим к уравнению

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k_2}{k_1},$$

откуда получаем $y = \frac{k_2}{k_1}x + C$.

Из условия $y=0$ при $x=0$ определяем $C=0$. Итак, $y=\frac{k_2}{k_1}x$. Так как $y=1$ при $x=4$, то $k_1=4k_2$. Далее из уравнений (165) получаем

$$\frac{d(x+y)}{dt}=(k_1+k_2)m.$$

Но по условию задачи $x+y+m=m_0$, поэтому последнее уравнение примет вид

$$\frac{dm}{dt}=-5k_2m.$$

Интегрируя, получаем $m=C_1e^{-5k_2t}$.

Из условия $m=10$ при $t=0$ определяем $C_1=10$. Аналогично, так как $m=5$ при $t=3$, имеем $k_2=\frac{1}{15}\ln 2$. Итак,

$$m=10\cdot 2^{-\frac{t}{3}};\quad x=8\left(1-2^{-\frac{t}{3}}\right),\quad y=2\left(1-2^{-\frac{t}{3}}\right).\quad \square$$

Пример 62. Имеется два резервуара одной и той же вместимости. В первом находится a литров рассола, содержащего b килограммов соли; во втором — a литров воды. В первый резервуар втекает вода, и смесь вытекает во второй. Затем из второго резервуара вновь образованная смесь вытекает наружу. Скорость втекания и вытекания во всех случаях одинакова. Концентрация в обоих резервуарах поддерживается равномерной. Найти, сколько соли окажется в каждом из резервуаров по истечении 1 часа, если $a=100$, $b=10$, а скорость втекания и вытекания 3 л/мин.

Р е ш е н и е. Пусть скорость втекания и вытекания равна m литров в минуту. За время dt втекает в первый резервуар $m\,dt$ литров воды, а вытекает $m\,dt$ смеси, содержащей $mc\,dt$ килограммов соли, где c — концентрация к моменту t. Если к моменту t в резервуаре находится x килограммов соли, то $c=\frac{x}{a}$. Имеем уравнение $dx=-\frac{mx}{a}dt$ с начальным условием $x=b$ при $t=0$, следовательно,

$$x=be^{-\frac{m}{a}t}. \tag{166}$$

Пусть к времени t во втором резервуаре содержится y килограммов соли, тогда концентрация $c_1=\frac{y}{a}$. За время dt поступает dx килограммов соли, а вытекает $m\,dt$ смеси, содержащей $mc_1\,dt$ килограммов соли. Поэтому имеем уравнение

$$dy=dx-\frac{ym\,dt}{a},$$

причем dx находится из уравнения (166) и берется со знаком плюс, так как в резервуар стекает положительное количество соли. Последнее уравнение примет окончательный вид

$$\frac{dy}{dt} + \frac{m}{a}y = \frac{bm}{a}e^{-\frac{m}{a}t}.$$

Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка, его общее решение имеет вид (см. §5)

$$y = \left(A + \frac{bm}{a}t\right)e^{-\frac{m}{a}t}.$$

Из условия $y = 0$ при $t = 0$ определяем $A = 0$. Так как по условию задачи $a = 100, \quad b = 10, \quad m = 3$, то $x = 10$ кг $\big($см. (166)$\big)$, а $y = 3$ кг. □

Пример 63. Некоторое вещество A превращается в вещество B через промежуточное вещество C. Происходят *реакции первого порядка*, т. е. скорость образования каждого вещества пропорциональна количеству присутствующего исходного вещества. Обозначив x, y, z число молей соответственно веществ A, C, B в момент t, найти зависимость x, y и z от времени.

Р е ш е н и е. $\frac{dx}{dt} = -k_1x, \quad \frac{dz}{dt} = k_2y, \quad \frac{dy}{dt} = k_1x - k_2y.$

Дифференцируя второе уравнение и используя третье, получаем $\frac{d^2z}{dt^2} = k_1k_2x - k_2^2y.$

Пусть $x + y + z = a$, тогда $x = a - y - z$ и последнее уравнение принимает вид

$$\frac{d^2z}{dt^2} = k_1k_2a - k_2(k_1 + k_2)y - k_1k_2z.$$

Подставляя значение y из второго уравнения, получаем

$$\frac{d^2z}{dt^2} + (k_1 + k_2)\frac{dz}{dt} + k_1k_2z = k_1k_2a.$$

Это линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами может быть записано так:

$$\frac{d^2(z-a)}{dt^2} + (k_1 + k_2)\frac{d(z-a)}{dt} + k_1k_2(z-a) = 0.$$

Корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + (k_1 + k_2)\lambda + k_1 k_2 = 0$$

таковы: $\lambda_1 = -k_1, \quad \lambda_2 = -k_2$. Поэтому общее решение имеет вид

$$z = C_1 e^{-k_1 t} + C_2 e^{-k_2 t} + a.$$

Далее находим

$$y = \frac{1}{k_2}\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{k_2}\left(k_1 C_1 e^{-k_1 t} + k_2 C_2 e^{-k_2 t}\right),$$

$$x = a - y - z = \left(\frac{k_1}{k_2} - 1\right) C_1 e^{-k_1 t}. \quad \square$$

Пример 64. Некоторое вещество A превращается в вещество B. Вещество B превращается в A и C, а C — в B. Имеем две обратимые реакции первого порядка:

$$\mathrm{A} \rightleftarrows \mathrm{B}, \quad \mathrm{B} \rightleftarrows \mathrm{C}.$$

Обозначив x, y, z число молей соответственно веществ A, B и C в момент времени t, найти зависимость их от времени t при условии, что в начале реакции имеется один моль исходного вещества.

Р е ш е н и е. За время dt будем иметь $dx = k_2 y\,dt - k_1 x\,dt$, откуда

$$\frac{dx}{dt} = k_2 y - k_1 x. \tag{167}$$

Аналогично $dy = -k_2 y\,dt - k_3 y\,dt + k_1 x\,dt + k_4 z\,dt$. Следовательно,

$$\frac{dy}{dt} = -(k_2 + k_3)y + k_1 x + k_4 z. \tag{168}$$

По условию задачи $x + y + z = 1$. Дифференцируя уравнение (167) и подставляя значения $\frac{dy}{dt}$, z и y, найденные из уравнений (167), (168) и из соотношения $x + y + z = 1$, приходим к уравнению

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + bx = m,$$

где $a = k_1+k_2+k_3+k_4$, $\quad b = k_1k_3+k_2k_4+k_1k_4$, $\quad m = k_2k_4$. Получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, общий интеграл которого имеет вид

$$x = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t} + \frac{m}{b},$$

где λ_1 и λ_2 — корни характеристического уравнения $\lambda^2+a\lambda+b = 0$ при $a^2 > 4b$, а C_1 и C_2 — постоянные, определяющиеся из условий $x = 1$, $\quad \frac{dx}{dt} = -k_1$ при $t = 0$. Имеем

$$C_1 = \frac{\lambda_2\left(1-\frac{m}{b}\right)+k_1}{\lambda_2-\lambda_1}, \quad C_2 = \frac{\lambda_2\left(1-\frac{m}{b}\right)+k_1}{\lambda_1-\lambda_2}.$$

Далее находим

$$y = \frac{1}{k_2}\left(\frac{dx}{dt}+k_1x\right) = \frac{1}{k_2}\left(C_1(\lambda_1+k_1)e^{\lambda_1 t} + C_2(\lambda_2+k_1)e^{\lambda_2 t} + \frac{k_1 m}{b}\right),$$

$$z = 1-x-y = 1-\left(1+\frac{k_1}{k_2}\right)\frac{m}{b} - \\ - C_1\left(1+\frac{\lambda_1+k_1}{k_2}\right)e^{\lambda_1 t} - C_2\left(1+\frac{\lambda_2+k_1}{k_2}\right)e^{\lambda_2 t}. \quad \square$$

Решить задачи:

121. Поскольку радон распадается сравнительно быстро, то период его полураспада можно определить экспериментально: $T = 3.82$ суток. Рассчитать теоретически значение параметра a в формуле (141) для радона. Изобразить график функции (141) в этом случае.

122. Имеется два химических вещества A и B с массой m_1 и m_2 граммов соответственно. В результате химической реакции соединяясь они переходят в новое вещество W, которое содержит две части вещества A и одну часть B. Реакция подчиняется закону действия масс. Составить математическую модель задачи.

123. В резервуаре находится 100 л водного раствора, содержащего 10 кг соли (можно сказать, что концентрация соли на 1 л раствора равна 0.1). В резервуар вливается вода со скоростью 3 л/мин, и смесь вытекает со скоростью 2 л/мин. Концентрация поддерживается равномерной, т. е. одинаковой во всех частях резервуара

посредством перемешивания. Составить дифференциальное уравнение, считая неизвестной функцией $y = y(t)$ — массу (не концентрацию!) соли к моменту времени t, учитывая, что $y(t)$ убывает, т. е. $y'(t) < 0$, и поэтому масса соли изменяется за время $(t, t + dt)$ на положительную величину $(-dy)$. Определить, сколько соли будет содержать резервуар через 1 час. Найти, через какое время останется 100 г соли.

124. Найти время, в течение которого вся вода вытекает из конической воронки, если известно, что половина воды вытекает за 2 мин.

125. В дне наполненного водой цилиндра имеется прямоугольное отверстие со сторонами a и b, закрытое заслонкой. Пусть эта заслонка в момент $t = 0$ начинает равномерно скользить вдоль стороны b со скоростью v, открывая отверстие. Найти, на какую величину x_1 опустится уровень воды за время t_1, в течение которого заслонка полностью откроет отверстие $\left(t_1 = \frac{b}{v}\right)$, если первоначальный уровень воды равен h, а площадь поперечного сечения сосуда равна S.

126. Резервуар содержит 75 л рассола, содержащего 3 кг растворенной соли. Вода вливается в резервуар со скоростью 4 л/мин, а смесь вытекает из него со скоростью 2 л/мин, причем концентрация поддерживается равномерной посредством перемешивания. Найти, сколько соли будет содержать раствор в резервуаре через 25 мин.

127. Некоторое количество нерастворимого вещества содержит в своих порах 10 кг соли. Подвергнув его действию 90 л воды, нашли, что в течение часа растворилась половина содержавшейся в нем соли. Определить, сколько соли растворилось бы в течение того же времени, если бы количество воды было бы удвоено $\left(\text{концентрация насыщенного раствора } c = \frac{1}{3}\right)$.

128. Некоторое нерастворимое вещество, содержащее в своих порах 2 кг соли, подвергается действию 30 л воды. Через 5 мин растворяется 1 кг соли. Определить, через какое время растворится 1.5 кг соли $\left(c = \frac{1}{3}\right)$.

129. В некоторой химической реакции вещество B разлагается на два вещества: X и Y, причем скорость образования каждого из них пропорциональна количеству b вещества B. Найти законы изменения количеств x и y веществ X и Y в зависимости от времени t, если к началу реакции (т. е. к моменту $t = 0$)

$b = b_0$, $x = 0$, $y = 0$, а по истечении одного часа $b = \frac{1}{2}b_0$, $x = \frac{b_0}{8}$, $y = \frac{3}{8}b_0$.

130. Преобразование радиоактивных веществ происходит со скоростью, пропорциональной их массе. ${}^{214}_{82}\mathrm{Pb}$ преобразуется в ${}^{214}_{83}\mathrm{Bi}$ с такой скоростью, что половина массы ${}^{214}_{82}\mathrm{Pb}$ оказывается преобразованной по истечении 27 мин. В свою очередь, половина данной массы ${}^{214}_{83}\mathrm{Bi}$ преобразуется в другое вещество в течение 19.5 мин. Считая, что первоначальная масса ${}^{214}_{82}\mathrm{Pb}$ была 1 кг, найти массу ${}^{214}_{82}\mathrm{Pb}$ и ${}^{214}_{83}\mathrm{Bi}$ по истечении 1 ч.

131. Некоторое вещество A превращается в другое вещество B. В то же время B переходит обратно в A. Скорости реакций пропорциональны наличной массе веществ. Результаты анализа помещены в табл. 1, где x и y — массы первого и второго веществ в некоторые моменты времени t соответственно. Найти зависимость x и y от времени.

Таблица 1

t	0	5	$+\infty$
x	10	7	3
y	0	3	7

16.3. Финансовые и экономические задачи

Пример 65. Рост денежных вкладов. Сумма A руб. положена в банк на r % в год. Найти закон изменения суммы при условии, что приращение начисляется непрерывно.

Р е ш е н и е. Общая сумма P вклада в результате начисления процентов один раз в конце года составит

$$P = A\left(1 + \frac{r}{100}\right).$$

Если проценты будут начисляться по истечении полугода, то

$$P = A\left(1 + \frac{r}{200}\right)^2,$$

если поквартально, то

$$P = A\left(1 + \frac{r}{400}\right)^4,$$

и если ежемесячно, то

$$P = A\left(1 + \frac{r}{1200}\right)^{12}.$$

В общем случае наращенная сумма в конце года составит

$$P = A\left(1 + \frac{r}{100m}\right)^{m}$$

при r % годовых, начисляемых m раз в год (например, 365 раз в год, т. е. ежедневно).

По истечении t лет общая сумма составит

$$P = A\left(\left(1 + \frac{r}{100m}\right)^{m}\right)^{t}.$$

Если число m начислений процентов в год будет беспредельно увеличиваться, то

$$P = \lim_{m\to+\infty} A\left(\left(1 + \frac{r}{100m}\right)^{m}\right)^{t} = \\ = A \lim_{m\to+\infty}\left(\left(1 + \frac{r}{100m}\right)^{\frac{100m}{r}}\right)^{\frac{tr}{100}} = Ae^{\frac{tr}{100}}.$$

В течение короткого промежутка времени dt приращение суммы P составит

$$dP = d\left(Ae^{\frac{tr}{100}}\right) = \frac{r}{100}Ae^{\frac{tr}{100}}dt = \frac{r}{100}Pdt.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение задачи имеет вид

$$\frac{dP}{dt} = \frac{r}{100}P. \quad \square \tag{169}$$

Пример 66. Эффективность рекламы. Предположим, что торговыми учреждениями реализуется продукция В, о которой в момент времени t из числа потенциальных покупателей N знает лишь x человек. Предположим далее, что для ускорения сбыта продукции В были даны рекламные объявления по радио и телевидению. Последующая информация о продукции распространяется среди покупателей посредством общения друг с другом. Построить закон изменения $x(t)$.

Р е ш е н и е. С большой степенью достоверности можно сказать, что после рекламных объявлений скорость изменения числа знающих о продукции В пропорциональна как числу знающих о товаре покупателей, так и числу покупателей, о нем еще не знающих.

Если условиться, что время отсчитывается после рекламных объявлений, когда о товаре узнало $\frac{N}{\gamma}$ человек, то приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x) \tag{170}$$

x

N

$\frac{N}{\gamma}$

O t

Рис. 45.

с начальным условием $x = \frac{N}{\gamma}$ при $t = 0$. В уравнении (170) коэффициент k — это положительный коэффициент пропорциональности. Интегрируя уравнение (170), находим

$$\frac{1}{N} \ln \frac{x}{N - x} = kt + C.$$

Полагая $C_1 = e^{NC}$, приходим к равенству

$$\frac{x}{N - x} = C_1 e^{Nkt} \quad \Leftrightarrow \quad x = N \frac{C_1 e^{Nkt}}{C_1 e^{Nkt} + 1} = \frac{N}{1 + Pe^{-Nkt}}\,, \tag{171}$$

где $P = \frac{1}{C_1} = e^{-NC}$.

В экономической литературе уравнение (171) обычно называют *уравнением логистической кривой* (ср. пример 54).

Если учесть теперь начальные условия, то уравнение (171) перепишется в виде

$$x = \frac{N}{1 + (\gamma - 1)e^{-Nkt}}\,.$$

На рис. 45 изображена логистическая кривая при $\gamma = 3$. $\square$

Пример 67. Спрос и предложение. Как известно, спрос и предложение — экономические категории товарного производства, возникающие и функционирующие на рынке, в сфере товарного обмена. При этом спрос — представленная на рынке потребность в товарах, а предложение — продукт, который есть на рынке или может быть доставлен на него. Одним из экономических законов товарного производства является закон спроса и предложения, который заключается в единстве спроса и предложения и их объективном стремлении к соответствию.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть в течение некоторого (достаточно продолжительного) времени крестьянин продает на рынке фрукты (например, яблоки), причем продает их после уборки урожая с недельными перерывами. Тогда при имеющихся у крестьянина запасах фруктов недельное предложение будет зависеть как от ожидаемой цены в наступающей неделе, так и от предполагаемого изменения цены в последующие недели. Если в наступающей неделе предполагается, что цена упадет, а в последующие недели повысится, то предложение будет сдерживаться при условии превышения ожидаемого повышения цен над издержками хранения. При этом предложение товара в ближайшую неделю будет тем меньшим, чем бóльшим предполагается в дальнейшем повышение цены. И наоборот, если в наступающей неделе цена будет высокой, а затем ожидается ее падение, то предложение увеличится тем больше, чем бóльшим предполагается понижение цены в дальнейшем.

Если обозначить через p цену на фрукты на наступающей неделе, а через p' — так называемую *тенденцию формирования цены* (производную цены по времени), то как спрос, так и предложение будут функциями указанных величин. При этом, как показывает практика, в зависимости от разных факторов спрос и предложение могут быть различными функциями цены и тенденции формирования цены. В частности, одна из таких функций задается линейной зависимостью, математически описываемой соотношением $y = ap' + bp + c$, где a, b и c — некоторые вещественные постоянные. А тогда, если, например, в рассматриваемой задаче цена на фрукты составляла 1 условную единицу за 1 кг, через t недель она была уже $p(t)$ условных единиц за 1 кг, а спрос q и предложение s определялись соответственно соотношениями $q = a_1p' + b_1p + c_1, \quad s = a_2p' + b_2p + c_2$, то для того чтобы спрос соответствовал предложению, необходимо выполнение равенства

$$a_1p' + b_1p + c_1 = a_2p' + b_2p + c_2,$$

или

$$\alpha p' + \beta p + \gamma = 0,$$

где $\alpha = a_1 - a_2$, $\beta = b_1 - b_2$, $\gamma = c_1 - c_2$. Отсюда приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{\alpha\, dp}{\beta p + \gamma} = -dt.$$

Интегрируя, находим $p = Ce^{-\frac{\beta}{\alpha}t} - \frac{\gamma}{\beta}$. Если же учесть начальное условие $p = 1$ при $t = 0$, то окончательно получаем

$$p = \left(1 + \frac{\gamma}{\beta}\right) e^{-\frac{\beta}{\alpha}t} - \frac{\gamma}{\beta}. \tag{172}$$

Таким образом, если требовать, чтобы между спросом и предложением все время сохранялось равновесие, необходимо, чтобы цена изменялась в соответствии с формулой (172).

Если $\beta = 0$ и $\alpha \neq 0$, то получающееся дифференциальное уравнение $p' = -\frac{\gamma}{\alpha}$ имеет решение, выражающееся другой формулой: $p = C - \frac{\gamma}{\alpha}t$ или с учетом начального условия $p = 1 - \frac{\gamma}{\alpha}t$. В случае $\beta = 0$, $\alpha \neq 0$, $\gamma \neq 0$ и $\frac{\gamma}{\alpha} > 0$ цена будет убывать до нуля и при $t > \frac{\alpha}{\gamma}$ становиться отрицательной, чего не может быть в реальности. Это противоречие говорит о применимости данной математической модели только в указанном случае при малых t.

Если $\alpha = 0$ и $\beta \neq 0$, то имеем алгебраическое уравнение $\beta p + \gamma = 0 \Leftrightarrow p = -\frac{\gamma}{\beta}$. Цена постоянна, что полностью соответствует отсутствию в уравнении фактора, изменяющего цену. Ставить какие-либо начальные условия в этом случае неправомерно. $\square$

Пример 68. Экономика. Говорят, что экономическая система является замкнутой, если весь произведенный продукт либо потребляется, либо вкладывается в рамках той же экономической системы. В этом случае отсутствуют экспорт, импорт и приток капитала извне. Таким образом, если Y, C и I являются соответственно объемом производства, потреблением и капиталовложением для некоторой замкнутой экономической системы в момент t, то $Y = C + I$. В случае наличия притока капитала (например, правительственные расходы G) экономика уже перестает быть замкнутой, и объем производства увеличивается на величину G:

$$Y = C + I + G. \tag{173}$$

Далее, потребление возрастает с ростом объема производства:

$$C = qY = (1 - s)Y, \tag{174}$$

где q, $s > 0$ — предельные склонности к потреблению и сбережению [13].

Рассмотрим экономическую систему, в которой правительственные расходы G_0 постоянны. В каждый момент t в экономике существует спрос $D(t)$, определяющий желаемый уровень потребления и капиталовложений. Задача состоит в том, чтобы сбалансировать экономику таким образом, чтобы объем производства совпадал со спросом, т. е. $D(t) \equiv Y(t)$. Однако на практике производство не может мгновенно реагировать на изменение спроса. Существует запаздывание τ, которое связано со временем, необходимым для постройки нового завода и т. п.

Чтобы сбалансировать экономику при наличии запаздывания, необходимо составлять планы на будущее и строить производство так, чтобы удовлетворять прогнозируемый спрос, полагая

$$D(t) = (1 - s)Y(t - \tau) + I(t) + G_0. \tag{175}$$

В уравнении (175) считаем, что за время τ капиталовложения существенно не изменяются, т. е. $I(t - \tau) = I(t)$. Теперь, если учесть, что

$$Y(t - \tau) = Y(t) - \tau Y'(t) + \alpha(\tau)\tau^2, \tag{176}$$

где функция $\alpha(\tau)$ ограничена при $\tau \to 0$, то увидим, что уравнение (175) означает достижение баланса с точностью до величины первого порядка относительно τ при

$$(1 - s)\tau Y'(t) = -sY(t) + I(t) + G_0 \tag{177}$$

для всех $t \in \mathbb{R}$.

Хотя величина $I(t)$ за время порядка τ существенно не изменяется, она не является постоянной. Капиталовложения зависят от общей тенденции развития производства. Одна из возможных стратегий в области капиталовложения — "принцип акселератора", согласно которому желательно выполнение соотношения $I(t) \equiv aY'(t)$, $a > 0$. Это равенство не может точно выполняться в силу запаздывания, но можно приблизиться к нему, если взять

$$I'(t) = b\big(aY'(t) - I(t)\big), \quad b > 0. \tag{178}$$

Уравнения (177) и (178) служат основой динамической модели экономики. Их можно привести к более привычному виду, продифференцировав (177):

$$(1-s)\tau Y'' + sY' = I' = b\,(aY' - I)\,. \tag{179}$$

Окончательный вид дифференциального уравнения получим, подставив I из (177) в (179):

$$(1-s)\tau y'' + \big(s - ba + (1-s)\tau b\big)y' + sby = 0, \tag{180}$$

где $y = Y - \frac{G_0}{s}$. Таким образом, разность между объемом производства и постоянной величиной $\frac{G_0}{s}$ удовлетворяет уравнению

$$y'' + 2ky' + \omega_0^2 y = 0, \tag{181}$$

где

$$k = \frac{s - ba + (1-s)\tau b}{2\tau(1-s)}\,, \quad \omega_0^2 = \frac{sb}{\tau(1-s)}\,. \tag{182}$$

Исследуем фазовое пространство уравнения (181). Перейдем от уравнения (181) к эквивалентной ему системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -\omega_0^2 y - 2kz. \end{cases} \tag{183}$$

Для определения характера положения равновесия $y = 0$, $z = 0$ системы (183) составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega_0^2 & -2k - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или $\lambda^2 + 2k\lambda + \omega_0^2 = 0$. Отсюда находим $\lambda_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 - \omega_0^2}$.

Рассмотрим следующие случаи:

1) $k = 0$. Решение системы (183) имеет вид

$$\begin{cases} y(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta), \\ z(t) = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \theta). \end{cases}$$

Фазовые траектории являются эллипсами $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ (рис. 46). Положение равновесия устойчиво — центр. Все решения являются периодическими. Периоды подъема и спада производства $\big(y = Y - \frac{G_0}{s} > 0$ и $y < 0$ соответственно$\big)$ сменяют друг друга. Интегральная кривая уравнения (181) $\big($а значит, и уравнения (180) с обозначениями (182)$\big)$ изображена на рис. 47. Это — *свободные незатухающие колебания* с периодом $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ (ω_0 — *собственная частота системы*).

z

$\omega_0 A$ $\mathbf{r}(t_3)$

$\mathbf{r}(t_2)$ $-A$ O $A\cos\theta$ $\mathbf{r}(t_4)$ A y

$\mathbf{r}(0)$

$-\omega_0 A$ $\mathbf{r}(t_1)$

Рис. 46.

y

A

$A\cos\theta$

O t_1 t_2 t_3 t_4 t

$-A$

Рис. 47.

2) $0 < k < \omega_0$. Корни λ_1 и λ_2 — комплексно–сопряженные, причем $\operatorname{Re}\lambda < 0$. Положение равновесия — устойчивый фокус. Уравнения фазовых траекторий (рис. 48) имеют вид

$$\begin{cases} y(t) = Ae^{-kt}\cos(\beta t + \theta), \\ z(t) = -\omega_0 Ae^{-kt}\sin(\beta t + \theta + \varphi), \end{cases}$$

где $\beta = \sqrt{\omega_0^2 - k^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{k}{\beta}$. Амплитуда колебаний уменьшается при возрастании t, период колебаний $T = \frac{2\pi}{\beta} > T_0$.

Интегральная кривая уравнения (181) изображена на рис. 49. Это *затухающие (демпфированные) свободные колебания.*

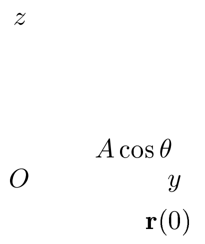

Рис. 48.

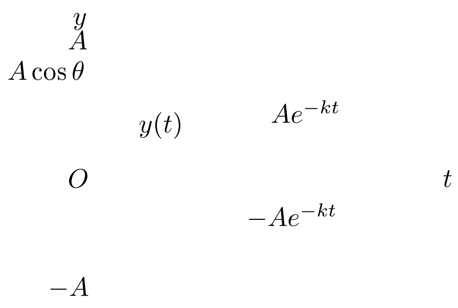

Рис. 49.

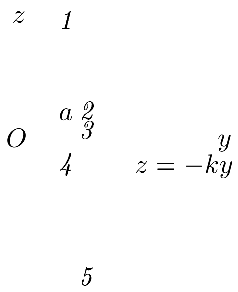

Рис. 50.

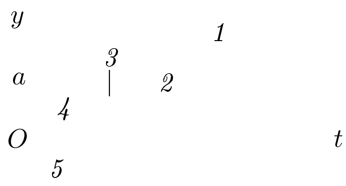

Рис. 51.

3) $k = \omega_0$. Корни $\lambda_1 = \lambda_2 = -k$ — вещественные и отрицательные. Положение равновесия — устойчивый вырожденный узел. Уравнения фазовых траекторий (рис. 50) имеют вид

$$\begin{cases} y(t) = e^{-kt}(a + bt), \\ z(t) = e^{-kt}\big(b - k(a + bt)\big), \end{cases}$$

где $a, b \in \mathbb{R}$. При $k \to \omega_0$ период колебаний $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - k^2}} \to \infty$, а при $k = \omega_0$ колебания прекращаются. Такая система называется *критически демпфированной* (затухающие колебания слабо демпфированного случая с $k < \omega_0$ исчезли). Интегральные кривые уравнения (181) изображены на рис. 51. Цифрами на графиках обозначены случаи: *1* — $b > ka$, *2* — $b = ka$, *3* — $0 < b < ka$, *4* — $b = 0$, *5* — $b < 0$.

4) $k > \omega_0$. Корни λ_1 и λ_2 — вещественные и отрицательные. Положение равновесия — устойчивый узел. Уравнения фазовых траекторий (рис. 52) имеют вид

$$\begin{cases} y(t) = ae^{\lambda_1 t} + be^{\lambda_2 t}, \\ z(t) = a\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + b\lambda_2 e^{\lambda_2 t}. \end{cases}$$

Все решения затухающие и неколеблющиеся. Если $k \to \infty$, то $\lambda_1 \to 0$, $\lambda_2 \to -\infty$, и, следовательно, главные направления приближаются к координатным осям, а траектории становятся более крутыми. В этом случае скорость $|z|$ очень быстро убывает. Такая система называется *сильно демпфированной*. Интегральные кривые уравнения (181) изображены на рис. 53. Соответствующие друг другу линии на рис. 52 и 53 обозначены одинаковыми цифрами: *1* — $a\lambda_1 + b\lambda_2 > 0$, *2* — $a\lambda_1 + b\lambda_2 = 0$, в остальных случаях $a\lambda_1 + b\lambda_2 < 0$, причем чем цифра больше, тем отрицательное выражение $(a\lambda_1 + b\lambda_2)$ больше по абсолютной величине. В случае *4* значение $b = 0$, а в случае *6* значение $a = 0$.

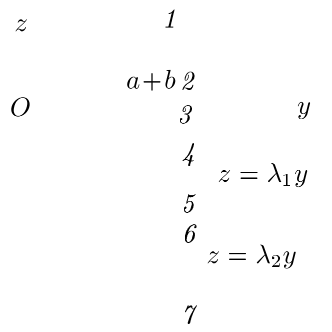

Рис. 52.

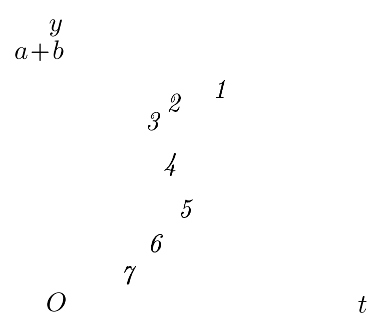

Рис. 53.

5) $k < 0$, $k^2 < \omega_0^2$. Корни λ_1 и λ_2 — комплексно–сопряженные, причем $\operatorname{Re}\lambda_1 = \operatorname{Re}\lambda_2 > 0$. Положение равновесия — неустойчивый

фокус. Уравнения фазовых траекторий (рис. 54) имеют вид

$$\begin{cases} y(t) = Ae^{|k|t}\cos(\beta t + \theta), \\ z(t) = -\omega_0 Ae^{|k|t}\sin(\beta t + \theta + \varphi), \end{cases}$$

где $\beta = \sqrt{\omega_0^2 - k^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{k}{\beta}$. Интегральная кривая приведена на рис. 55. Пики подъемов увеличиваются с возрастанием t так же, как и глубины спадов. В такой ситуации необходимо внешнее вмешательство.

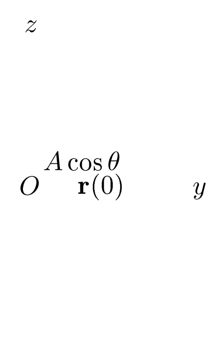

Рис. 54.

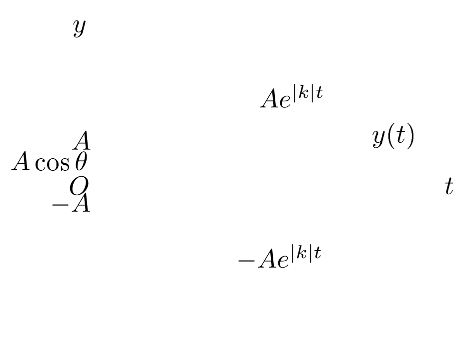

Рис. 55.

6) $k < 0$, $k^2 = \omega_0^2$. Корни $\lambda_1 = \lambda_2$ — вещественные и положительные. Положение равновесия — неустойчивый вырожденный узел. Уравнения фазовых траекторий (рис. 56) имеют вид:

$$\begin{cases} y(t) = e^{|k|t}(a + bt), \\ z(t) = e^{|k|t}\big(b - k(a + bt)\big), \end{cases}$$

где a, $b \in \mathbb{R}$. Интегральные кривые уравнения (181) изображены на рис. 57. Цифрами на графиках обозначены случаи *1* — $b > 0$, *2* — $b = 0$, *3* — $ka < b < 0$, *4* — $b = ka$, *5* — $b < ka$.

7) $k < 0$, $k^2 > \omega_0^2$. Корни λ_1 и λ_2 — вещественные и положительные. Положение равновесия — неустойчивый узел. Уравнения фазовых траекторий (рис. 58) имеют вид

$$\begin{cases} y(t) = ae^{\lambda_1 t} + be^{\lambda_2 t}, \\ z(t) = a\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + b\lambda_2 e^{\lambda_2 t}. \end{cases}$$

Интегральные кривые уравнения (181) изображены на рис. 59. Соответствующие друг другу линии на рис. 58 и 59 обозначены одинаковыми цифрами: *7* — $a\lambda_1 + b\lambda_2 < 0$, *6* — $a\lambda_1 + b\lambda_2 = 0$, в остальных случаях $a\lambda_1 + b\lambda_2 > 0$, причем чем цифра меньше, тем выражение $(a\lambda_1 + b\lambda_2)$ больше. В случае *2* — значение $b = 0$, а в случае *4* — значение $a = 0$.

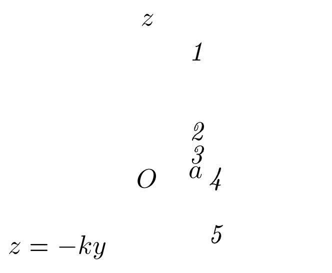

Рис. 56.

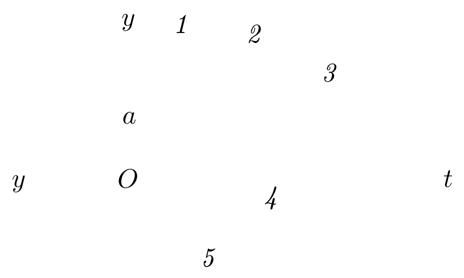

Рис. 57.

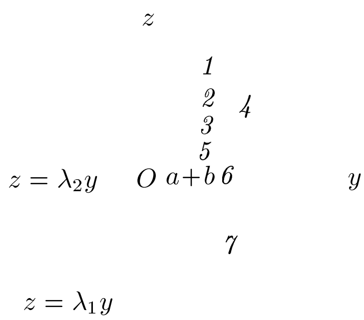

Рис. 58.

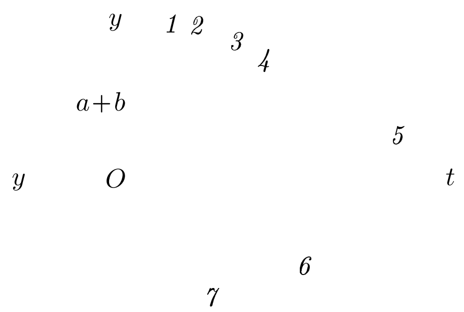

Рис. 59.

Если ввести обозначения $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2k \end{pmatrix}$, $\Delta = \det A = \omega_0^2$ и $\sigma = -\operatorname{tr} A = 2k$ (здесь $\operatorname{tr} A$ — след матрицы A), то качественное поведение системы (183) в начале координат соответствует поведению систем, изображенных на плоскости $O\Delta\sigma$ на рис. 60, см. также рис. 30. $\square$

$\sigma = -\operatorname{tr} A$

$\sigma^2 = 4\Delta$

O

$\Delta = \det A$

Рис. 60.

Решить задачи:

132. **Поток научной информации.** Было замечено, что число статей в научных журналах по одной теме возрастает, причем чем больше статей накоплено к моменту t, тем больше следующий прирост. Это наблюдение позволило высказать гипотезу, что данный процесс есть процесс естественного роста (см. (139)). Из данной гипотезы следовало, что если $y(t)$ — функция, значения которой дают число публикаций к моменту времени t, то она должна удовлетворять уравнению (140) и иметь вид (141). Было замечено также, что удвоение числа публикаций в разных областях происходит за одинаковый промежуток времени, примерно за 10 лет. Рассчитать значение параметра a в формуле (141) ($\ln 2 \approx 0.69$) и

построить график функции $y = y(t)$. Во сколько раз увеличится число публикаций за 5 лет и за 20 лет?

133. Через сколько лет удвоится 1 млн руб., хранящийся на 3%-ом вкладе?

134. Население г. Ростова-на-Дону на 1 января 1995 г. составило 1 млн 23 тыс. человек. Какую численность города можно ожидать в 2000 г., если годовой прирост за 1994 год составил 0.22%?

135. На 1 января 1995 г. в Самаре насчитывалось 1 млн 175 тыс. жителей, а в Уфе — 1 млн 94 тыс. Когда можно ожидать одинаковую численность жителей этих городов, если в Самаре годовое уменьшение численности составило 0.83%, а в Уфе — годовой прирост 0.22%?

136. Составить закон регулируемого роста населения, т. е. такого, что численность населения P не превосходит M.

Контрольное задание №25

В каждом варианте решить задачу при определенных значениях параметров.

Варианты №1 — 5.

Скорость изменения концентрации $c(t)$ некоторого вещества в момент t равна 2^{-t}, где t — время в часах. Найти концентрацию вещества в момент $t = t_1$, если начальная концентрация c_0 равна 1 г/л.

Значения параметра в вариантах №:

1 — $t_1 = 3$ ч;
2 — $t_1 = 2$ ч;
3 — $t_1 = 1$ ч;
4 — $t_1 = 4$ ч;
5 — $t_1 = 5$ ч.

Варианты №6 — 9.

В сосуд, содержащий 10 л воды, со скоростью 2 л/мин поступает раствор, в каждом литре которого содержится 0.3 кг соли. Этот раствор перемешивается с водой, и новый раствор вытекает из сосуда с той же скоростью. Найти, сколько соли будет в сосуде по истечении времени $t = t_1$.

Значения параметра в вариантах №:

6 — $t_1 = 10$ мин;
7 — $t_1 = 20$ мин;

$8 - t_1 = 30$ мин;

$9 - t_1 = 40$ мин.

Варианты №10 — 13.

В баке находится 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В бак со скоростью 5 л/мин непрерывно поступает вода, перемешивающаяся с раствором. Полученный новый раствор вытекает из бака с той же скоростью. Найти, сколько соли останется в баке по истечении времени $t = t_1$.

Значения параметра в вариантах №:

$10 - t_1 = 1$ ч;

$11 - t_1 = 2$ ч;

$12 - t_1 = 3$ ч;

$13 - t_1 = 4$ ч.

Варианты №14 — 16.

В резервуаре находится 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В резервуар вливается вода со скоростью 3 л/мин, и в результате тщательного перемешивания получается новый раствор, который вытекает из резервуара со скоростью 2 л/мин. Найти, сколько соли останется в резервуаре по истечении времени $t = t_1$.

Значения параметра в вариантах №:

$14 - t_1 = 1$ ч;

$15 - t_1 = 2$ ч;

$16 - t_1 = 3$ ч.

Варианты №17, 18.

В резервуаре вместимостью 100 л находится раствор, содержащий 10 кг соли. В резервуар вливается вода со скоростью 3 л/мин, и в результате тщательного перемешивания получается новый раствор, который вытекает из резервуара с такой же скоростью. Найти, сколько соли останется в резервуаре по истечении времени $t = t_1$.

Значения параметра в вариантах №:

$17 - t_1 = 5$ ч;

$18 - t_1 = 6$ ч.

Вариант №19.

Некоторое вещество, начальная концентрация которого равна c_0, вступает в химическую реакцию. Со временем концентрация этого вещества убывает; обозначим через $c(t)$ его концентрацию в момент t, отсчитываемый от начала реакции. Скорость изменения концентрации пропорциональна $c(t)$. Найти зависимость концентрации $c(t)$ вещества от времени.

Варианты №20, 21.

Задача о распаде радия. Скорость распада радия пропорциональна его массе. Найти закон распада радия, если известна его первоначальная масса m_0 и период полураспада T, т. е. время, в течение которого распадается половина первоначальной массы радия. Найти, какой процент первоначальной массы радия распадется по истечении времени $t = t_1$, если $T = 1590$ лет.

Значения параметра в вариантах №:

20 — $t_1 = 100$ лет;

21 — $t_1 = 200$ лет.

Вариант №22.

Скорость распада некоторого радиоактивного вещества пропорциональна его массе. За 30 дней распалось 25% первоначальной массы m_0 этого вещества. Найти: 1) закон распада вещества; 2) время T, в течение которого первоначальная масса вещества уменьшится вдвое; 3) через сколько времени останется 1% первоначальной массы вещества.

Вариант №23.

Некоторое радиоактивное вещество с известной первоначальной массой m_0 имеет период полураспада 100 дней (период полураспада — время, в течение которого распадется половина первоначальной массы). Скорость распада этого вещества в каждый момент t пропорциональна его массе в этот момент (коэффициент пропорциональности k называется константой скорости распада). Найти закон распада вещества и значение константы скорости распада.

Вариант №24.

Активность некоторого радиоактивного отложения пропорциональна скорости своего уменьшения. Найти зависимость этой активности от времени, если известно, что в течение четырех дней она уменьшилась вдвое.

У к а з а н и е. Обозначим через $I(t)$ активность радиоактивного отложения в момент t, отсчитываемый от начала процесса. В начальный момент $t = 0$ пусть $I(0) = I_0$. Скорость уменьшения этой активности $\frac{dI}{dt}$ пропорциональна $I(t)$:

$$\frac{dI}{dt} = kI, \tag{184}$$

где $k < 0$ — коэффициент пропорциональности. Уравнение (184) есть дифференциальное уравнение, описывающее процесс изменения со временем активности радиоактивного отложения.

Вариант №25.

Период полураспада радия 1590 лет (период полураспада — время, в течение которого распадется половина первоначальной массы). В настоящее время имеется $m_0 = 500$ мг радия. Скорость его распада пропорциональна его массе. Найти, какое количество радия останется через 250 лет.

Вариант №26.

Вещество A превращается в вещество B. Спустя 1 ч после начала реакции осталось 44.8 г вещества A, а после 3 ч — 11.2 г вещества. Определить первоначальное количество a вещества A и время, когда останется $\frac{1}{64}$ часть этого вещества.

У к а з а н и е. Обозначим x массу вещества A, вступившего в реакцию к моменту t, отсчитываемому от начала реакции. Скорость изменения $x(t)$ со временем t, т. е. $\frac{dx}{dt}$, пропорциональна оставшейся массе вещества A к этому моменту, а именно,

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x), \tag{185}$$

где k — коэффициент пропорциональности (константа скорости реакции). Уравнение (185) есть дифференциальное уравнение, описывающее процесс изменения массы вещества A, вступившего в реакцию.

Вариант №27, 28.

Вещество Y образуется в результате химической реакции между веществами A и B. В этой реакции один грамм вещества Y возникает при соединении p граммов вещества A и $q = 1 - p$ граммов вещества B. Скорость образования Y в любой момент t равна произведению масс A и B, не вступивших еще к этому моменту в реакцию. Показать, что если в момент $t = 0$ соединить a граммов A и b граммов B, то масса $x(t)$ вещества Y при $t > 0$ будет удовлетворять уравнению

$$\frac{dx}{dt} = (a - px)(b - qx).$$

Вариант №27. Найти закон изменения массы $x(t)$ вещества Y в зависимости от времени t, если к началу реакции (т. е. в момент $t = 0$) $\quad x = 0$.

Вариант №28. Какова наибольшая масса вещества Y, возникающая в результате этого эксперимента, при условии, что $\frac{a}{p} > \frac{b}{q}$.

Вариант №29.

Нерастворимое вещество содержит в своих порах 20 кг растворимой соли. Подвергнув его действию 80 л воды, установили, что через 1 ч растворилась половина содержавшейся в нем соли. Считая концентрацию насыщенного раствора соли равной 0.3 кг/л, найти, сколько соли растворится в течении того же времени, если объем воды удвоить.

У к а з а н и е. Использовать химический закон растворения твердого вещества в жидкости: скорость растворения при постоянной температуре пропорциональна массе нерастворенного вещества и разности между концентрацией c насыщенного раствора и концентрацией раствора в данный момент, т. е.

$$\frac{dm}{dt} = -km\left(c - \frac{m_0 - m}{V}\right),$$

где $m = m(t)$ — масса нерастворенного вещества в момент t, m_0 — первоначальная масса вещества, V — объем растворителя, $k > 0$ — коэффициент пропорциональности. Знак минус взят потому, что масса нерастворенного вещества убывает с течением времени, а следовательно, $\frac{dm}{dt} < 0$.

Вариант №30.

Нерастворимое вещество, содержащее в своих порах 2 кг растворимой соли, подвергается действию 30 л воды. Через 5 мин 1 кг соли растворяется. Найти, через сколько времени растворится 99% первоначальной массы соли, если концентрация насыщенного раствора соли равна 0.3 кг/л.

У к а з а н и е. См. указание к варианту №29.

Контрольное задание №26

В каждом варианте решить задачу при определенных значениях параметров.

Варианты №1 — 5.

Скорость размножения бактерий в питательной среде пропорциональна их количеству. В начальный момент $t = 0$ имелось n_0 бактерий, а в течение времени $t = t_1$ их количество $n(t)$ увеличилось в m раз. Найти зависимость количества бактерий от времени.

Во сколько раз увеличится количество бактерий в течение времени $t = t_2$?

Значения параметра в вариантах №:

1 — $n_0 = 100$, $t_1 = 3$ ч, $m = 2$, $t_2 = 9$ ч;

2 — $n_0 = 200$, $t_1 = 5$ ч, $m = 3$, $t_2 = 10$ ч;

3 — $n_0 = 300$, $t_1 = 6$ ч, $m = 4$, $t_2 = 8$ ч;

4 — $n_0 = 400$, $t_1 = 7$ ч, $m = 2.5$, $t_2 = 12$ ч;

5 — $n_0 = 500$, $t_1 = 2$ ч, $m = 1.5$, $t_2 = 4$ ч;

Варианты №6 — 8.

Дрожжи в растворе сахара растут таким образом, что их масса увеличивается со скоростью $1.03^t \ln 1.03$, где t — время в часах. Пусть начальная масса дрожжей равна 1 г. Составить математическую модель процесса и найти массу дрожжей по истечении времени $t = t_1$.

Значения параметра в вариантах №:

6 — $t_1 = 0.1$ ч;

7 — $t_1 = 0.2$ ч;

8 — $t_1 = 0.3$ ч.

Варианты №9 — 11.

Скорость роста популяции насекомых в момент времени t (время выражено в днях) задается величиной $\frac{9000}{(1+t)^2}$. Составить математическую модель процесса. Найти численность популяции насекомых в момент $t = t_1$, если начальная популяция состояла из 1000 насекомых.

Значения параметра в вариантах №:

9 — $t_1 = 1$ день;

10 — $t_1 = 2$ дня;

11 — $t_1 = 3$ дня.

Варианты №12 — 14.

Скорость роста популяции бактерий в момент времени t равна $(10000 - 2000t)$, где t — время в часах. В начальный момент численность популяции равна 10^6. Найти численность популяции по истечении времени $t = t_1$.

Значения параметра в вариантах №:

12 — $t_1 = 1$ ч;

13 — $t_1 = 5$ ч;

14 — $t_1 = 10$ ч.

Варианты №15, 16.

В питательную среду вносят популяцию из 1000 бактерий. Численность популяции возрастает со скоростью

$$1000\frac{100+3t^2}{(100+t^2)^2},$$

где t — время в часах. Найти размер этой популяции

а) в момент $t = t_1$;

б) максимальный.

Значения параметра в вариантах №:

15 — $t_1 = 1$ ч;

16 — $t_1 = 2$ ч.

Варианты №17 — 19.

В культуре пивных дрожжей быстрота прироста действующего фермента пропорциональна его массе. Найти, во сколько раз увеличится эта масса в течение времени $t = t_1$, если она удваивается в течение одного часа.

Значения параметра в вариантах №:

17 — $t_1 = 2$ ч;

18 — $t_1 = 2\frac{1}{2}$ ч;

19 — $t_1 = 3$ ч.

Указание. Примем за аргумент время t, а за искомую функцию $N(t)$ — массу действующего фермента в момент времени t. Пусть $N(0) = N_0$. Быстрота прироста действующего фермента представляет собой скорость изменения функции $N = N(t)$ со временем t. С другой стороны, по условию задачи скорость изменения $N(t)$, т. е. $\frac{dN}{dt}$, пропорциональна массе действующего фермента, а именно,

$$\frac{dN}{dt} = kN,$$

где $k > 0$ — коэффициент пропорциональности. Таким способом получается дифференциальное уравнение, описывающее процесс.

Вариант №20.

Популяция животных обитает в благоприятных условиях (достаточные ресурсы питания, неограниченная территория поселения, отсутствие подавления другими видами и человеком). Будем считать, что при этих условиях численность животных непрерывно увеличивается со скоростью, пропорциональной числу особей (коэффициент пропорциональности $k > 0$ называется коэффициентом естественного прироста численности животных). Пусть $x(t)$ — численность животных в момент t, $x(0) = x_0$, где $t = 0$ — время начала наблюдения за популяцией, $x(0)$ — число животных в популяции в начальный момент $t = 0$. Численность этой популяции $x(t)$ удваивается в течение 50 дней. Найти закон изменения численности популяции. Через сколько дней ее численность утроится?

Вариант №21.

Определить равновесный размер популяции, если на 1000 особей в единицу времени 100 особей рождается, а гибнет одна. Предполагается при этом, что начальная численность популяции равна 10 особям. Построить график логистической кривой.

Вариант №22.

Для популяции $x(t)$, изменяющейся согласно уравнению логистического роста, доказать, что скорость роста максимальна тогда, когда популяция достигает численности, равной половине равновесного значения.

Вариант №23.

Популяция бактерий возрастает от начального размера в 100 единиц до равновесного размера в 100 000 единиц. Предполагается, что в течение первого часа она увеличилась до 120 единиц. Считая, что рост популяции подчиняется логистическому уравнению, определить ее размер в момент t.

Вариант №24.

Рост, выживание и деление клеток определяются потоком питательных веществ через оболочку клетки. Это означает, что на ранних стадиях клеточного роста увеличение массы клетки в момент времени t пропорционально квадрату радиуса клетки, а масса клетки пропорциональна его кубу. Вывести дифференциальное уравнение, описывающее изменение массы клетки в зависимости от времени t, если начальная масса клетки равна a.

Варианты №25 — 30.

Проинтегрировать модифицированное логистическое уравнение

$$\frac{dx}{dt} = x(\beta - \delta x)\left(1 - \frac{m}{x}\right).$$

Построить графики $x(t)$ для $t > 0$ при $x(0) = 20$ и $x(0) = 5$.

Значения параметра в вариантах №:
25 — $\beta = 100, \quad \delta = 1, \quad m = 10;$
26 — $\beta = 50, \quad \delta = 2, \quad m = 10;$
27 — $\beta = 100, \quad \delta = 2, \quad m = 10;$
28 — $\beta = 50, \quad \delta = 1, \quad m = 10;$
29 — $\beta = 200, \quad \delta = 4, \quad m = 10;$
30 — $\beta = 200, \quad \delta = 2, \quad m = 10.$

§17. Задачи из механики, приводящие к дифференциальным уравнениям высших порядков

Построение математических моделей многих механических процессов, например движения материальной точки, колебаний упругих систем, прохождения тока через электрические цепи и др., приводит к дифференциальным уравнениям высших порядков.

В этом параграфе рассматриваются задачи о прямолинейном движении материальной точки с массой m под действием силы $\mathbf{F}$. Так как движение прямолинейное, то в дальнейшем будут использоваться только проекции силы $\mathbf{F}$, скорости $\mathbf{v}$, ускорения $\mathbf{a}$ и вектора пути $\mathbf{s}$ на ось, вдоль которой происходит движение. Эти проекции будут обозначаться соответственно F, v, a и s. Для решения таких задач используется второй закон Ньютона:

$$F = ma, \tag{186}$$

где a — ускорение материальной точки. Оно может быть выражено через скорость $v = \frac{ds}{dt}$ или координату s движущейся точки по формуле

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}\,.$$

Будем считать, что известен закон $F = F(t, s, v)$. Таким образом, выражение (186) есть дифференциальное уравнение второго порядка относительно координаты материальной точки s:

$$F\left(t, s, \frac{ds}{dt}\right) = m\frac{d^2 s}{dt^2}\,. \tag{187}$$

В некоторых задачах F может не зависеть от s. В этих случаях выражение (186), по-прежнему являющееся дифференциальным уравнением второго порядка, может быть записано в виде таких двух дифференциальных уравнений первого порядка, решение которых может быть найдено их последовательным интегрированием:

$$\begin{cases} F(t,v) = m\dfrac{dv}{dt}\,. \\ \dfrac{ds}{dt} = v. \end{cases} \tag{188}$$

Если по какой-то причине в такой задаче не нужно искать координату s, то задача сводится к одному дифференциальному уравнению первого порядка.

Дифференциальные уравнения всех задач этого параграфа допускают понижение порядка и получение решения в квадратурах.

Пример 69. Материальная точка с массой m и начальной скоростью v_0 движется прямолинейно. На нее действует сила сопротивления $F = -k\sqrt[3]{v}$ (k — постоянный коэффициент, $k > 0$). Определить время t_1 от начала ее движения до остановки и путь s_1, пройденный ею.

Р е ш е н и е. Примем за ось Ox прямую, вдоль которой происходит движение, а за начало координат — начальное положение материальной точки. На нее действует только одна сила F, не зависящая от s, следовательно, дифференциальное уравнение, соответствующее данной задаче, имеет вид первого уравнения системы (188)

$$m\frac{dv}{dt} = -k\sqrt[3]{v}.$$

Его общее решение

$$\frac{3}{2}mv^{2/3} = -kt + C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная. Поскольку при $t = 0$ имеем $v = v_0$, то $C_1 = \frac{3}{2}mv_0^{2/3}$. Следовательно,

$$v^{2/3} = v_0^{2/3} - \frac{2kt}{3m}\,. \tag{189}$$

Так как в момент t_1 по условию задачи $v = 0$, то отсюда следует, что $t_1 = \frac{3m}{2k}v_0^{2/3}$. Для того чтобы найти s как функцию t, полученное частное решение (189) подставим во второе уравнение системы (188):

$$\frac{ds}{dt} = v = \left(v_0^{2/3} - \frac{2kt}{3m}\right)^{3/2}.$$

Проинтегрировав его, будем иметь

$$s = -\frac{3m}{5k}\left(v_0^{2/3} - \frac{2kt}{3m}\right)^{5/2} + C_2,$$

где C_2 — произвольная постоянная.

Так как при $t = 0$ положено $s = 0$, то $C_2 = \frac{3m}{5k}v_0^{5/3}$. Таким образом, закон движения материальной точки имеет вид

$$s = \frac{3m}{5k}v_0^{5/3} - \frac{3m}{5k}\left(v_0^{2/3} - \frac{2kt}{3m}\right)^{5/3}.$$

Следовательно, в момент остановки $t = t_1$ пройденный путь $s = s_1$ определяется формулой

$$s_1 = \frac{3m}{5k}v_0^{5/3}. \quad \square$$

Пример 70. Сила сопротивления воздуха при падении тела с парашютом пропорциональна квадрату скорости движения с коэффициентом пропорциональности $k > 0$. Масса тела равна m. Найти предельную скорость падения, считая, что тело будет двигаться как материальная точка.

Р е ш е н и е. Процесс, заданный условием задачи, описывается вторым законом Ньютона (186). Координатную ось будем считать направленной вертикально вниз. Действующая сила F состоит из силы тяжести $F_1 = mg$, где g — ускорение свободного падения, и силы сопротивления воздуха $F_2 = -kv|v|$ (минус показывает, что сила сопротивления воздуха направлена в сторону, противоположную направлению скорости движения). Так как $v > 0$, то $F_2 = -kv^2$, и поэтому $F = F_1 + F_2 = mg - kv^2$.

Для решения этой задачи достаточно только одного первого уравнения системы (188), поскольку расстояние, пройденное телом, не присутствует в выражении для силы F, и в задаче не требуется находить закон движения тела:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2.$$

Для решения этого уравнения запишем его в виде

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2.$$

Полагая $\frac{k}{m} = p > 0$, имеем

$$\frac{dv}{dt} = g - pv^2.$$

Отделяя переменные, получаем

$$\frac{dv}{g - pv^2} = dt.$$

Интегрируя это уравнение, находим его общий интеграл

$$\frac{1}{2\sqrt{pg}} \ln \left| \frac{\sqrt{g} + \sqrt{p}v}{\sqrt{g} - \sqrt{p}v} \right| + \ln |C| = t$$

(C — произвольная постоянная), который после потенцирования принимает вид

$$\frac{\sqrt{g} + \sqrt{p}v}{\sqrt{g} - \sqrt{p}v} = C_1 e^{2\sqrt{pg}t}, \tag{190}$$

где $C_1 = \frac{1}{C^{2\sqrt{pg}}}$. Разрешая это уравнение относительно v, получаем

$$v = \sqrt{\frac{g}{p}} \cdot \frac{C_1 - e^{-2\sqrt{pg}t}}{C_1 + e^{-2\sqrt{pg}t}}.$$

Предельное значение скорости v при $t \to +\infty$

$$\lim_{t \to +\infty} v = \sqrt{\frac{g}{p}}.$$

Заменяя $p = \frac{k}{m}$, получаем, что предельная скорость падения тела с парашютом определяется формулой

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k}}. \quad \square$$

Пример 71. Материальная точка с массой m, имеющая начальную скорость $v_0 = 0$, погружается в жидкость, оказывающую сопротивление, пропорциональное скорости, с коэффициентом пропорциональности $k > 0$. Найти закон движения точки, полагая, что путь отсчитывается вглубь жидкости от ее поверхности.

Р е ш е н и е. На материальную точку действуют две силы: сила тяжести $F_1 = mg$ (где g — ускорение свободного падения) и сила сопротивления жидкости $F_2 = -kv$ (минус показывает, что сила сопротивления направлена в сторону, противоположную направлению скорости движения).

Равнодействующая сил, приложенных к материальной точке, определяется выражением

$$F = F_1 + F_2 = mg - kv.$$

Следовательно, дифференциальные уравнения ее движения имеют вид

$$\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = mg - kv, \\ \dfrac{ds}{dt} = v. \end{cases}$$

Отделяя переменные в первом уравнении системы и интегрируя, получаем

$$\ln|mg - kv| = -\frac{k}{m}t + C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная. Так как $v = 0$ при $t = 0$, то

$$\ln(mg) = C_1,$$

следовательно,

$$mg - kv = mge^{-\frac{k}{m}t}. \tag{191}$$

Так как $v = \frac{ds}{dt}$, то, интегрируя (191), получаем

$$mgt - ks = -\frac{m^2g}{k}e^{-\frac{k}{m}t} + C_2,$$

где C_2 — произвольная постоянная. А так как $s = 0$ при $t = 0$, то

$$C_2 = \frac{m^2g}{k},$$

вследствие чего окончательно имеем

$$s = \frac{m^2g}{k^2}\left(e^{-\frac{k}{m}t} - 1\right) + \frac{mg}{k}t. \quad \square$$

Контрольное задание №27

В каждом варианте решить задачу при определенных значениях параметров.

Варианты №1 — 4.

Материальная точка движется прямолинейно с постоянным ускорением a. Найти закон ее движения, если ее начальная скорость равна v_0, а путь, пройденный к начальному моменту $t = 0$, равен s_0.

Значения параметра в вариантах №:
1 — $a = 2$ м/с^2, $v_0 = 6$ м/с, $s_0 = 10$ м;
2 — $a = 4$ м/с^2, $v_0 = 7$ м/с, $s_0 = 20$ м;
3 — $a = 3$ м/с^2, $v_0 = 10$ м/с, $s_0 = 30$ м;
4 — $a = 6$ м/с^2, $v_0 = 48$ м/с, $s_0 = 91$ м.

Варианты №5 — 8.

Найти закон движения материальной точки при свободном падении с заданной высоты h_0 с начальной скоростью v_0. Ускорение свободного падения $g = 9.8$ м/с^2.

Значения параметра в вариантах №:
5 — $h_0 = 2$ м, $v_0 = 3$ м/с;
6 — $h_0 = 10$ м, $v_0 = 0$;
7 — $h_0 = 20$ м, $v_0 = 2$ м/с;
8 — $h_0 = 15$ м, $v_0 = 9$ м/с.

Варианты №9 — 13.

Материальная точка свободно падает с заданной высоты h_0 с начальной скоростью $v_0 = 0$. Найти промежуток времени T, по истечении которого точка упадет на землю. Ускорение свободного падения $g = 9.8$ м/с^2.

Значения параметра в вариантах №:
9 — $h_0 = 1$ м;
10 — $h_0 = 2$ м;
11 — $h_0 = 3$ м;
12 — $h_0 = 7$ м.

Варианты №13 — 16.

Материальная точка свободно падает с заданной высоты h_0 с начальной скоростью $v_0 = 0$. Найти промежуток времени T, по истечении которого точка упадет на параллельную Земле поверхность, находящуюся на высоте h_1 $(h_1 < h_0)$. Ускорение свободного падения $g = 9.8$ м/с^2.

Значения параметра в вариантах №:

13 — $h_0 = 3$ м, $h_1 = 2$ м;

14 — $h_0 = 2$ м, $h_1 = 1$ м;

15 — $h_0 = 4$ м, $h_1 = 3$ м;

16 — $h_0 = 8$ м, $h_1 = 6$ м.

Варианты №17 — 20.

Найти закон движения материальной точки, подброшенной с высоты h_0 вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Ускорение свободного падения $g = 9.8$ м/с^2.

Значения параметра в вариантах №:

17 — $h_0 = 0$, $v_0 = 2$ м/с;

18 — $h_0 = 1$ м, $v_0 = 3$ м/с;

19 — $h_0 = 2$ м, $v_0 = 6$ м/с;

20 — $h_0 = 3$ м, $v_0 = 5$ м/с.

Вариант №21.

Материальная точка начинает двигаться по прямой с ускорением, равным $\frac{a_0}{(\tau+t)^2}$ ($a_0 = 5$ м, $\tau = 1$ с), из состояния покоя при $t = 0$. Найти закон ее движения.

Вариант №22.

Материальная точка движется прямолинейно с ускорением $a = bt + c$, где $b = 6$ м/с^3, $c = -12$ м/с^2. В момент $t = 0$ начальная скорость $v_0 = 9$ м/с, расстояние от начала отсчета $s_0 = 10$ м. Найти: 1) законы изменения скорости и пути от времени; 2) значения ускорения, скорости и пути в момент $t_1 = 2$ с; 3) момент времени, когда скорость будет наименьшей.

Вариант №23.

Материальная точка движется прямолинейно с ускорением $a = bt + c$, где $b = -6$ м/с^3, $c = 18$ м/с^2. В момент $t = 0$ начальная скорость $v_0 = 24$ м/с, расстояние от начала отсчета $s_0 = 15$ м. Найти: 1) законы изменения скорости и пути от времени; 2) значения ускорения, скорости и пути в момент времени $t_1 = 2$ с; 3) момент времени, когда скорость будет наибольшей.

Вариант №24.

Вычислить путь, пройденный поездом, и время его движения до полной остановки, если замедляющая сила есть линейная функция скорости, т. е. $F = kv + b$, где k и b — постоянные величины. Поезд считается материальной точкой с массой m.

Вариант №25.

Материальная точка с массой m падает в среде (g — ускорение свободного падения), сопротивление которой пропорционально первой степени скорости (k — коэффициент пропорциональности, $k > 0$). Найти законы изменения скорости и пути от времени, а также предельную скорость падения.

Вариант №26.

Материальной точке, находящейся на поверхности Земли (радиус Земли равен R), сообщена начальная вертикальная скорость $v_0 = \sqrt{2gR}$, где g — ускорение свободного падения. Определить закон ее движения (силой сопротивления воздуха пренебречь).

У к а з а н и е. Сила земного притяжения, действующая на материальную точку с массой m равна $-\frac{mgR^2}{x^2}$, где x — расстояние от центра Земли, а g — ускорение свободного падения на поверхности Земли. При интегрировании уравнения следует воспользоваться тем, что

$$\frac{d^2s}{dt^2} = v\frac{dv}{ds}\,.$$

Вариант №27.

Материальная точка с массой m движется по прямой линии к центру O, от которого она отталкивается с силой, обратно пропорциональной третьей степени расстояния до центра O, т. е. $F = \frac{k}{x^3}$ (k — постоянный коэффициент, $k > 0$). В начальный момент ($t = 0$) материальная точка находится от центра O на расстоянии b и имеет скорость v_0, направленную к центру O. Найти закон ее движения.

Вариант №28.

Материальная точка с массой m движется по прямой линии к центру, притягивающему ее с силой $F = \frac{mk}{r^3}$, где r — расстояние от центра до материальной точки, k — постоянный положительный коэффициент. В начальный момент ($t = 0$) материальная точка находилась в состоянии покоя на расстоянии b от центра. Найти время достижения ею центра.

Вариант №29.

Материальная точка с массой m движется по прямой линии к центру O, от которого она отталкивается с силой, пропорциональной расстоянию до центра O, т. е. $F = kx$ (k — постоянный коэффициент, $k > 0$). В начальный момент ($t = 0$) материальная точка находится на расстоянии c от центра O и имеет скорость v_0, направленную к центру O. Найти закон ее движения. При каком условии на параметры m, k, c и v_0 материальная точка не попадет в центр O?

Вариант №30.

Пуля, двигаясь со скоростью $v_0 = 400$ м/с, пробивает стену толщиной $h = 0.2$ м и вылетает из нее со скоростью $v_1 = 100$ м/с. Полагая силу сопротивления стены пропорциональной квадрату скорости движения пули, найти время T движения пули в стене. Пулю считать материальной точкой.

§18. Основные методы приближенного решения задачи Коши

Типы обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающих получение решения в явном виде, хорошо изучены. Таких уравнений очень немного. Большинство задач, возникающих при математическом моделировании реальных процессов, приходится решать приближенно.

Разработано множество методов численного решения этих задач [20—27]. Остановимся только на наиболее часто используемых методах решения задачи Коши и краевой задачи.

Рассмотрим следующую простейшую *задачу Коши*: на сегменте $[a, b]$ найти решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{192}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y(a) = y_0, \quad y_0 \in \mathbb{R}. \tag{193}$$

Будем предполагать, что функция $f(x, y)$ достаточно гладкая и удовлетворяет всем условиям, при которых существует и единственно решение задачи Коши (192), (193) (см. §1).

18.1. Разложение решения в ряд Тейлора

Разобьем сегмент $[a, b]$ на n равных частей точками

$$x_j = a + hj, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Точки x_j называются *узлами*, а *сеткой* узлов — множество $\mathbb{S}_h = \{x_j | j = 0, 1, 2, \dots, n\}$.

Обозначим

$$y_j = y(x_j), \quad y_j^{(k)} = \left.\frac{d^k y}{dx^k}\right|_{x=x_j}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots$$

Пусть известно решение $y = y(x)$ рассматриваемой задачи Коши в узле x_j. Разложим функцию $y(x)$ по формуле Тейлора* в окрестности точки x_j:

$$y(x) = y_j + y_j^{'}(x - x_j) + \frac{y_j^{''}}{2!}(x - x_j)^2 + \dots + \frac{y_j^{(s)}}{s!}(x - x_j)^s + r,$$

$$r = \frac{y^{(s+1)}\big(x_j + \theta_1(x - x_j)\big)}{(s+1)!}(x - x_j)^{s+1}, \quad 0 < \theta_1 < 1.$$

Положим $x = x_j + h$ и обозначим $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$, тогда последнее разложение примет вид

$$\Delta y_j = y_j^{'} h + \frac{y_j^{''}}{2!}h^2 + \dots + \frac{y_j^{(s)}}{s!}h^s + \varrho, \tag{194}$$

$$\varrho = A_j h^{s+1}, \quad A_j = \frac{y^{(s+1)}(x_j + \theta h)}{(s+1)!}, \quad 0 < \theta < 1. \tag{195}$$

Отметим, что $\varrho = O(h^{s+1}) = o(h^s)$. Здесь записи $\alpha = o(h^s)$, $\beta = O(h^{s+1})$ означают, что $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\alpha}{h^s} = 0, \quad \lim\limits_{h\to 0} \frac{\beta}{h^{s+1}} = C, \quad C \in \mathbb{R}$.

Если в правой части равенства (194) ограничиться слагаемыми, содержащими степени h не выше s, то получим приближенное равенство

$$\Delta y_j \approx y_j^{'} h + \frac{y_j^{''}}{2!}h^2 + \dots + \frac{y_j^{(s)}}{s!}h^s. \tag{196}$$

Абсолютная погрешность этого равенства равна $o(h^s)$. Таким образом, имеем

$$y_{j+1} = y_j + \Delta y_j, \tag{197}$$

где Δy_i определено соотношением (196).

---

* Б. Тейлор (B. Taylor, 1685—1731) — английский математик и философ.

Далее, зная значение y_i решения $y = y(x)$ рассматриваемой задачи Коши в узле x_j, с точностью до $o(h^s)$ находим значение решения в следующем узле x_{j+1} сетки $\mathbb{S}_h$. Значение $y_0 = y(x_0)$ известно из начального условия (193). Поэтому, используя равенства (196) и (197), можно, полагая $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$, последовательно найти приближенные значения $y_1, y_2, \dots, y_n$, т. е. значения решения задачи Коши (192), (193) во всех узлах сетки $\mathbb{S}_h$.

Для значения x, $\quad x \in [a, b]$, не принадлежащем сетке $\mathbb{S}_h$, соответствующие значения решения $y = y(x)$ можно найти, используя интерполяцию.

При предыдущем изложении остается невыясненным вопрос о том, как находить используемые в равенстве (196) значения $y_j^{'}, y_j^{''}, y_j^{'''}, \dots, y_j^{(s)}$. Как следует из равенства (192),

$$y_j^{'} = f(x_j, y_j).$$

Продифференцировав $(s-1)$ раз обе части равенства (192) и положив затем $x = x_j$, будем иметь

$$\begin{aligned}
y_j^{''} &= f_x^{'}(x_j, y_j) + f_y^{'}(x_j, y_j) y_j^{'} = f_x^{'}(x_j, y_j) + f_y^{'}(x_j, y_j) f(x_j, y_j), \\
y_j^{'''} &= f_{xx}^{''}(x_j, y_j) + 2 f_{xy}^{''}(x_j, y_j) y_j^{'} + f_{yy}^{''}(x_j, y_j) {y_j^{'}}^2 + f_y^{'}(x_j, y_j) y_j^{''} = \\
&= f_{xx}^{''}(x_j, y_j) + 2 f_{xy}^{''}(x_j, y_j) f(x_j, y_j) + f_{yy}^{''}(x_j, y_j) f^2(x_j, y_j) + \\
&\qquad + f_y^{'}(x_j, y_j) \left(f_x^{'}(x_j, y_j) + f_y^{'}(x_j, y_j) f(x_j, y_j) \right), \\
&\vdots
\end{aligned}$$

З а м е ч а н и е (о методе Рунге* практической оценки погрешности). Предположим, что $y(x)$ достаточно гладкая функция и шаг h мал. Тогда с малой погрешностью можно считать, что на промежутке $[x_j, x_j + 2h]$ производная $y^{(s+1)}(x) \approx A$, $\quad A = \mathrm{const}$, и, следовательно, $\varrho = A h^{s+1}$.

Обозначим

$$\Sigma_h^{(j)} = y_j^{'} h + \frac{y_j^{''}}{2!} h^2 + \ldots + \frac{y_j^{(s)}}{s!} h^s,$$

* К.Д.Т. Рунге (C.D.T. Runge, 1856—1927) — немецкий физик и математик.

$$\Sigma_{2h}^{(j)} = y_j^{'} \cdot 2h + \frac{y_j^{''}}{2!}(2h)^2 + \ldots + \frac{y_j^{(s)}}{s!}(2h)^s.$$

Тогда в соответствии с равенствами (194) и (195) имеем, с одной стороны,

$$y_{j+2} = y_j + \Sigma_{2h}^{(j)} + A(2h)^{s+1},$$

с другой, —

$$y_{j+2} = y_j + \Sigma_h^{(j)} + \Sigma_h^{(j+1)} + 2Ah^{s+1},$$

откуда после исключения из двух последних равенств y_{j+2} находим

$$\varrho = Ah^{s+1} = \frac{\Sigma_h^{(j)} + \Sigma_h^{(j+1)} - \Sigma_{2h}^{(j)}}{2(2^s - 1)}\,. \tag{198}$$

Получено приближенное выражение абсолютной погрешности ϱ на отрезке $[x_j, x_j + 2h]$. На практике обычно выбирают $n = 2m$ (четное), находят решения с шагом h и $2h$ и сравнивают результаты вычислений. Если $s \geqslant 3$, то в решении, найденном с шагом h, по крайней мере на одну верную значащую цифру больше, чем в решении с шагом $2h$.

Этим соображением руководствуются при выборе шага h для заданной точности нахождения решения. Если h взять очень малым, то возрастет вычислительная погрешность, вызванная округлением (или усечением) чисел, с которыми работает компьютер.

18.2. Методы Эйлера и Рунге—Кутты

Если в правой части равенства (194) взять лишь одно слагаемое, т. е., если положить

$$y_{j+1} \approx y_j + \Delta\tilde{y}_j, \tag{199}$$

$$\Delta\tilde{y}_j = y_j^{'}h = hf(x_j, y_j), \tag{200}$$

то приходим к **методу Эйлера**.

Вычисления ведутся по схеме

$$\begin{cases} \tilde{y}_0 = y_0, \\ \Delta\tilde{y}_j = f(x_j, \tilde{y}_j)h, \\ \tilde{y}_{j+1} = \tilde{y}_j + \Delta\tilde{y}_j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \end{cases} \tag{201}$$

Метод Эйлера — метод первого порядка. (Если самая высокая степень h в правой части приближенного равенства (196) равна s, то соответствующий метод, по которому находятся значения $y_{j+1} = y_j + \Delta y_j$ решения, называется **методом порядка** s. Абсолютная погрешность метода порядка s есть $o(h^s)$).

Метод Эйлера — "грубый" метод.

Чтобы уменьшить погрешность метода, используют схему *"предиктор – корректор"* (предсказание – поправка):

$$\begin{cases} \tilde{y}_0 = y_0, \\ K_j^{(1)} = hf(x_j, \tilde{y}_j), \\ K_j^{(2)} = hf\left(x_j + h, \tilde{y}_j + K_j^{(1)}\right), \\ \Delta\tilde{y}_j = \dfrac{1}{2}\left(K_j^{(1)} + K_j^{(2)}\right), \\ \tilde{y}_{j+1} = \tilde{y}_j + \Delta\tilde{y}_j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \end{cases} \tag{202}$$

Погрешность вычисления приращения

$$\Delta y_j^* = \frac{h}{2}\Big(f(x_j, y_j) + f\big(x_j + h, y_j + hf(x_j, y_j)\big)\Big)$$

при этом равна $O(h^3)$. Действительно, раскладывая по формуле Тейлора

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + f_x^{'}(x, y)\Delta x + f_y^{'}(x, y)\Delta y + \ldots$$

выражение $l = f\big(x_j + h, y_j + hf(x_j, y_j)\big)$, имеем

$$l = f(x_j, y_j) + f_x^{'}(x_j, y_j)h + f_y^{'}(x_j, y_j)hf(x_j, y_j) + O(h^2).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \Delta y_j^* &= \frac{h}{2}\big(f(x_j, y_j) + l\big) = \\ &= \frac{h}{2}\big(f(x_j, y_j) + f(x_j, y_j) + f_x^{'}(x_j, y_j)h + f_y^{'}(x_j, y_j)f(x_j, y_j)h + O(h^2)\big) = \\ &= f(x_j, y_j)h + \frac{h^2}{2}\big(f_x^{'}(x_j, y_j) + f_y^{'}(x_j, y_j)f(x_j, y_j)\big) + O(h^3) = \\ &= y_j^{'}h + \frac{y_j^{''}}{2!}h^2 + O(h^3), \end{aligned}$$

что отличается от правой части приближенного равенства (196) при $s = 2$ лишь слагаемым $O(h^3)$.

Поэтому метод "предиктор – корректор" есть метод второго порядка. Его называют также **методом второго порядка Рунге—Кутты***. Имеются методы Рунге—Кутты и более высокого порядка. Их получают, учитывая члены разложения (194) при значениях $s > 2$.

Приведем широко используемую схему четвертого порядка метода Рунге—Кутты для задачи Коши (192), (193):

$$\begin{cases} \tilde{y}_0 = y_0, \\ K_j^{(1)} = hf(x_j, \tilde{y}_j), \\ K_j^{(2)} = hf\left(x_j + \dfrac{h}{2}, \tilde{y}_j + \dfrac{1}{2}K_j^{(1)}\right), \\ K_j^{(3)} = hf\left(x_j + \dfrac{h}{2}, \tilde{y}_j + \dfrac{1}{2}K_j^{(2)}\right), \\ K_j^{(4)} = hf\left(x_j + h, \tilde{y}_j + K_j^{(3)}\right), \\ \Delta\tilde{y}_j = \dfrac{1}{6}\left(K_j^{(1)} + 2K_j^{(2)} + 2K_j^{(3)} + K_j^{(4)}\right), \\ \tilde{y}_{j+1} = \tilde{y}_j + \Delta\tilde{y}_j. \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \end{cases} \tag{203}$$

З а м е ч а н и е. Методы Эйлера, Рунге—Кутты, Адамса**(см. п. 18.3.) и другие можно использовать при решении задачи Коши как для одного уравнения, так и для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом для каждого j вычисляются приращения всех неизвестных функций. В качестве примера приведем схему второго порядка Рунге—Кутты для системы.

Рассмотрим задачу Коши для *нормальной системы* обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_s}{dx} = f_s(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \tag{204}$$

$$y_s(a) = y_{s0}, \tag{205}$$

$y_{s0} \in \mathbb{R}, \quad s = 1, 2, \ldots, m, \quad x \in [a, b]$.

---

* М.В. Кутта (M.W. Kutta, 1867—1944) — немецкий физик и математик.

** Д.К. Адамс (J.C. Adams, 1819—1892) — английский астроном и математик.

Неизвестные функции $y_s = y_s(x), \quad s = 1, 2, \dots, m$.

Схема (201) в этом случае имеет вид

$$\begin{cases} \tilde{y}_{s0} = y_{s0}, \\ \tilde{y}_{s,j+1} = \tilde{y}_{sj} + hf(x_j, \tilde{y}_{1j}, \tilde{y}_{2j}, \dots, \tilde{y}_{mj}), \\ \ j = 0, 1, 2, \dots, n-1, \\ \ s = 0, 1, 2, \dots, m-1. \end{cases} \tag{206}$$

Схема (202) описывается формулами

$$\begin{cases} \tilde{y}_{s0} = y_{s0}, \\ K_{sj}^{(1)} = hf(x_j, \tilde{y}_{1j}, \tilde{y}_{2j}, \dots, \tilde{y}_{mj}), \\ K_{sj}^{(2)} = hf\left(x_j + h, \tilde{y}_{1j} + K_{1j}^{(1)}, \tilde{y}_{2j} + K_{2j}^{(1)}, \dots, \tilde{y}_{mj} + K_{mj}^{(1)}\right), \\ \Delta\tilde{y}_{sj} = \dfrac{1}{2}\left(K_{sj}^{(1)} + K_{sj}^{(2)}\right), \\ \tilde{y}_{s,j+1} = \tilde{y}_{sj} + \Delta\tilde{y}_{sj}, \qquad \begin{array}{l} j = 0, 1, 2, \dots, n-1, \\ s = 0, 1, 2, \dots, m-1. \end{array} \end{cases} \tag{207}$$

Здесь, как и выше, $h = \frac{b-a}{n}, \quad x_j = a + h_j, \quad y_{sj} = y_s(x_j)$.

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений другого вида (а также одно дифференциальное уравнение порядка 2 и выше) с помощью введения новых неизвестных функций часто удается свести к системе в нормальной форме.

Пример 72. Найти решение задачи Коши

$$y^{''} + xy^{'} + 2y = 0, \tag{208}$$

$$y(0) = 1, \quad y^{'}(0) = 2 \tag{209}$$

на сегменте $[0; 0.5]$

Введем новую неизвестную функцию $u = \frac{dy}{dx}$. Тогда рассматриваемая задача для одного дифференциального уравнения с неизвестной функцией $y(x)$ приводится к следующей задаче Коши для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями $y(x)$ и $u(x)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = u, \\ \dfrac{du}{dx} = -2y - xu, \end{cases} \tag{210}$$

$$y(0) = 1, \quad u(0) = 2. \tag{211}$$

Это система вида (204), где $y_1(x) = y(x)$, $y_2(x) = u(x)$, $f_1(x, y_1, y_2) = u$, $f_2(x, y_1, y_2) = -2y - xu$. Возьмем $n = 5$, тогда шаг $h = 0.1$, $x_j = jh$, $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Результаты вычислений по методу Эйлера приведены в табл. 2.

Используем метод четвертого порядка Рунге—Кутты. Схема (203) для решения начальной задачи (210), (211) выглядит так:

$$
\begin{cases}
\tilde{y}_0 = 1, \\
\tilde{u}_0 = 2, \\
K_{yj}^{(1)} = h\tilde{u}_j, \\
K_{uj}^{(1)} = -h(2\tilde{y}_j + x_j\tilde{u}_j), \\
K_{yj}^{(2)} = h\left(\tilde{u}_j + \dfrac{1}{2}K_{uj}^{(1)}\right), \\
K_{uj}^{(2)} = -h\left(2\left(\tilde{y}_j + K_{yj}^{(1)}\right) + \left(x_j + \dfrac{h}{2}\right)\left(\tilde{u}_j + \dfrac{1}{2}\left(\tilde{u}_j + \dfrac{1}{2}K_{uj}^{(1)}\right)\right)\right), \\
K_{yj}^{(3)} = h\left(\tilde{u}_j + \dfrac{1}{2}K_{uj}^{(2)}\right), \\
K_{uj}^{(3)} = -h\left(2\left(\tilde{y}_j + K_{yj}^{(2)}\right) + \left(x_j + \dfrac{h}{2}\right)\left(\tilde{u}_j + \dfrac{1}{2}\left(\tilde{u}_j + \dfrac{1}{2}K_{uj}^{(2)}\right)\right)\right), \\
K_{yj}^{(4)} = h\left(\tilde{u}_j + K_{uj}^{(3)}\right), \\
K_{uj}^{(4)} = -h\left(2\left(\tilde{y}_j + K_{yj}^{(3)}\right) + (x_j + h)\left(\tilde{u}_j + \left(\tilde{u}_j + \dfrac{1}{2}K_{uj}^{(3)}\right)\right)\right), \\
\Delta\tilde{y}_j = \dfrac{1}{6}\left(K_{yj}^{(1)} + 2K_{yj}^{(2)} + 2K_{yj}^{(3)} + K_{yj}^{(4)}\right), \\
\Delta\tilde{u}_j = \dfrac{1}{6}\left(K_{uj}^{(1)} + 2K_{uj}^{(2)} + 2K_{uj}^{(3)} + K_{uj}^{(4)}\right), \\
\tilde{y}_{j+1} = \tilde{y}_j + \Delta\tilde{y}_j, \\
\tilde{u}_{j+1} = \tilde{u}_j + \Delta\tilde{u}_j, \\
j = 0, 1, 2, 3, 4.
\end{cases}
$$

Результаты вычислений приведены в табл. 3. Сравните их с результатами счета по методу Эйлера. Для удобства сравнения графики решений показаны на рис. 61 (• — метод Эйлера, нижняя линия — метод Рунге—Кутты четвертого порядка). Рисунок наглядно показывает, что метод Эйлера — грубый метод.

При вычислениях по методу Эйлера с шагом $h = 0.05$ оказывается, что найденные таким образом значения $y(0.1)$, $y(0.2)$, $y(0.3)$, $y(0.4)$, $y(0.5)$ отличаются от приведенных в табл. 2 не более, чем на $1.5 \cdot 10^{-6}$. Вычисленное другим способом (см. ниже раздел 18.4) значение $y(0.5)$ имеет вид $y(0.5) = 1.652325 + \varrho$, где $|\varrho| < 10^{-6}$. $\square$

Таблица 2

j	x_j	y_j	u_j	Δy_j	Δu_j
0	0.0	1.0000000	2.0000000	0.2000000	-0.2000000
1	0.1	1.2000000	1.8000000	0.1800000	-0.2580000
2	0.2	1.3800000	1.5420000	0.1542000	-0.3068400
3	0.3	1.5342000	1.2351600	0.1235160	-0.3438948
4	0.4	1.6577160	0.8912652	0.0891265	-0.3671938
5	0.5	1.7468425	0.5240714		

Таблица 3

j	x_j	y_j	u_j	$K_{y_j}^{(1)}$	$K_{u_j}^{(1)}$	$K_{y_j}^{(2)}$	$K_{u_j}^{(2)}$
0	0.0	1.0000000	2.0000000	0.2000000	-0.2000000	0.1900000	-0.2295000
1	0.1	1.1890355	1.7714543	0.1771454	-0.2555216	0.1643694	-0.2801770
2	0.2	1.3526074	1.4925220	0.1492522	-0.3003719	0.1342336	-0.3190051
3	0.3	1.4862488	1.1749616	0.1174946	-0.3324986	0.1008713	-0.3443043
4	0.4	1.5867577	0.8321975	0.0832198	-0.3506394	0.0656878	-0.3552330
5	0.5	1.6523233	0.4784904				

j	x_j	$K_{y_j}^{(3)}$	$K_{u_j}^{(3)}$	$K_{y_j}^{(4)}$	$K_{u_j}^{(4)}$	Δy_j	Δu_j
0	0.0	0.1885250	-0.2284262	0.1771574	-0.2554207	0.1890346	-0.2285455
1	0.1	0.1631366	-0.2787145	0.1492739	-0.3002892	0.1635720	-0.2789323
2	0.2	0.1333020	-0.3172703	0.1175252	-0.3324394	0.1336414	-0.3175604
3	0.3	0.1002810	-0.3424352	0.0832526	-0.3506070	0.1005089	-0.3421641
4	0.4	0.0654581	-0.3533764	0.0478821	-0.3543842	0.0655656	-0.3537071
5	0.5						

Недостатком метода Рунге—Кутты четвертого порядка является то, что для его использования необходимо знать значения функций в правых частях системы дифференциальных уравнений не только в точках расчетной сетки, но и между ними. Если функции заданы не формулами, а, как это часто бывает в практических расчетах, таблично (поскольку сами являются результатами других расчетов), то эти значения неизвестны. В такой ситуации рекомендуется пользоваться методом Рунге—Кутты второго порядка.

y

1.5

1 0 0.5 x

Рис. 61.

П р и м е ч а н и е. Имеется много программ для компьютеров, которые реализуют схемы различного порядка метода Рунге—Кутты. Прежде чем использовать ту или иную программу, внимательно ознакомьтесь с инструкцией к ней, а также с комментариями в тексте программы. Чтобы убедиться в правильности своих вычислений, рекомендуется перед решением задачи предварительно решить какую-нибудь аналогичную задачу, имеющую точное решение, и сравнить известные результаты с результатами машинного счета. Эти замечания относятся к *любой* программе.

В задачах 138 и 139 переписать дифференциальное уравнение (или систему дифференциальных уравнений) в нормальной форме. На указанном отрезке приближенно решить задачу Коши (137—140) с помощью численного метода Рунге—Кутты четвертого порядка, использовав готовую компьютерную программу (или написав собственную). Шаг h взять ± 0.01. Построить график зависимости $y(x)$:

137. $\dfrac{dy}{dx} = y^2 + y + x,$

$$y\big|_{x=0} = -1, \quad x \in [-4, 2].$$

138. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\sin y,$

$y\big|_{x=0} = \frac{\pi}{2}\,,\ \frac{dy}{dx}\big|_{x=0} = 0, \quad x \in [-8, 8].$

139. $\dfrac{d^3y}{dx^3} + \operatorname{tg} x \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{x}{x-3} y = 0,$

$\frac{d^2y}{dx^2}\big|_{x=0} = 1,\ \frac{dy}{dx}\big|_{x=0} = y\big|_{x=0} = 0, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{3}\,, \frac{\pi}{3}\right].$

140. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2txy + y^3 + \cos(ty), \end{cases}$

$x\big|_{t=0} = 1,\ y\big|_{t=0} = 0, \quad x \in [0.2\,;2].$

Контрольное задание №28

В каждом варианте на указанном отрезке приближенно решить задачу Коши с помощью численного метода Рунге—Кутты четвертого порядка, использовав готовую компьютерную программу (или написав собственную). Шаг h взять ± 0.01. Построить график зависимости $y(x)$:

28.1. $y' = \sin\cos y^2\,; \quad y(0) = 0, \quad x \in [-8, 8].$

28.2. $y' = \dfrac{2x-1}{y+1} + \dfrac{1}{y^2+1}\,; \quad y(0) = 0, \quad x \in [-4, 5].$

28.3. $y' = \dfrac{5x}{1+y^2} + \ln\left(1+x^2\right)\,; \quad y(2) = 2, \quad x \in [-3, 3].$

28.4. $y' = x + y\ln\left(x^2+y^2\right)\,; \quad y(1) = 3, \quad x \in [-8, 1].$

28.5. $y' = 1 + y^2 + \cos y + \sin x\,; \quad y(0) = -1, \quad x \in [0, 1].$

28.6. $y' = \operatorname{arctg} x - \dfrac{y^2}{x^2+1}\,; \quad y(0) = 0, \quad x \in [-3, 7].$

28.7. $y' = e^{\cos y} - x^2\,; \quad y(1) = 0, \quad x \in [-2, 2].$

28.8. $y' = \operatorname{arctg} x^2\,; \quad y(0) = 1, \quad x \in [-5, 4].$

28.9. $y' = \dfrac{\sin y \cdot \sin y^2}{y}\,; \quad y(0) = 1, \quad x \in [-8, 8].$

28.10. $y' = \ln y\,; \quad y(0) = 2, \quad x \in [-8, 3].$

28.11. $y' = e^{x^2}\,; \quad y(0) = 1, \quad x \in [-1, 1].$

28.12. $y' = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{4+y^2} - y\,; \quad y(-2) = -1, \quad x \in [-3, 8].$

28.13. $y' = \dfrac{\sin\sin x}{y}\,; \quad y(2) = 3, \quad x \in [-8, 8].$

28.14. $y' = x\cos y^2\,;\quad y(1)=1,\quad x\in[-8,8]$.
28.15. $y' = \dfrac{\sin\cos x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,;\quad y(0)=2,\quad x\in[-8,8]$.
28.16. $y' = (x+y)(2\,\mathrm{arctg}\,x + \mathrm{arctg}\,y)\,;\quad y(1)=-1,\quad x\in[0,1]$.
28.17. $y' = \left(x+y^2\right)\sin x\cdot\mathrm{arctg}\,x\,;\quad y(-1)=1,\quad x\in[-3,0]$.
28.18. $y' = \dfrac{x+y^2}{x^2+y^2}\,;\quad y(1)=0,\quad x\in[-8,8]$.
28.19. $y' = \dfrac{1+x}{1+y^2} + \dfrac{\mathrm{arctg}\,x}{1+x^2}\,;\quad y(0)=0,\quad x\in[-8,6]$.
28.20. $y' = \dfrac{\cos(x+y)}{1+y^4} + x\,;\quad y(0)=-1,\quad x\in[-2,2]$.
28.21. $y' = (x+y)\cos y\,;\quad y(0)=1,\quad x\in[-8,8]$.
28.22. $y' = \dfrac{\ln\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} + x - 1\,;\quad y(0)=-2,\quad x\in[-1,2]$.
28.23. $y' = \dfrac{x+3}{y}\cos(y+2x)\,;\quad y(2)=2,\quad x\in[-8,3]$.
28.24. $y' = xe^x\ln y\,;\quad y(0)=2,\quad x\in[-8,1]$.
28.25. $y' = \dfrac{1+y^2}{2} - \mathrm{arctg}\,\dfrac{x^2}{2}\,;\quad y(0)=1,\quad x\in[-8,0]$.
28.26. $y' = xy\sin x + \cos y\,;\quad y(0)=-1,\quad x\in[-3,2]$.
28.27. $y' = \cos y^2\,;\quad y(0)=1,\quad x\in[-8,8]$.
28.28. $y' = \left(1+\dfrac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{arctg}(x+y)\,;\quad y(0)=-1,\quad x\in[-7,3]$.
28.29. $y' = \mathrm{arctg}(xy) + x + y - 5\,;\quad y(2)=2,\quad x\in[0,2]$.
28.30. $y' = e^{\mathrm{arctg}\,x} - \cos y\,;\quad y(0)=0,\quad x\in[-8,1]$.

Контрольное задание №29

В каждом варианте представить дифференциальное уравнение в виде системы в нормальной форме, и на указанном отрезке приближенно решить задачу Коши с помощью численного метода Рунге—Кутты четвертого порядка, использовав готовую компьютерную программу (или написав собственную). Шаг h взять ± 0.01. Построить график зависимости $y(x)$:

29.1. $y'' = \dfrac{ye^x}{1+2e^{y'}}\,;\quad y(0)=1\,,\quad y'(0)=0,\quad x\in[-8,2]$.
29.2. $y'' = \dfrac{x+y+y'^2}{x^2+y^3+y'^4}\,;\quad y(0)=1\,,\quad y'(0)=0,\quad x\in[-8,3]$.
29.3. $y'' = x\sin y\cdot\mathrm{arctg}\,y'\,;\quad y(0)=0\,,\quad y'(0)=1,\quad x\in[-8,1]$.
29.4. $y'' = y'^2\cos x\,;\quad y(0)=0\,,\quad y'(0)=1,\quad x\in[-3,0]$.

29.5. $y'' = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + y'^3}$; $y(1) = -2$, $y'(1) = 0$, $x \in [-2, 7]$.
29.6. $y'' = x \operatorname{tg} y + y'$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $x \in [-5, 0]$.
29.7. $y'' = e^{\sin x}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $x \in [-2, 0]$.
29.8. $y'' = 1 + \cos(xyy')$; $y(-1) = 0$, $y'(-1) = 2$;
$x \in [-3, -1]$.
29.9. $y'' = y'(x + y) + ye^x$; $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$, $x \in [-4, 1]$.
29.10. $y'' = (2x + 1)(3x + 2) + yy'$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;
$x \in [-1, 0]$.
29.11. $y'' = \cos^2 y - \sin\left(x^2\right)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $x \in [-3, 3]$.
29.12. $y'' = \dfrac{y}{x^2 + 3} + \sin y$; $y(-1) = 0$, $y'(-1) = -1$;
$x \in [-2, 0]$.
29.13. $y'' = 2 - \operatorname{tg} y + \cos\left(xy'^2\right)$; $y(-2) = 0$, $y'(-2) = 1$;
$x \in [-3, -1]$.
29.14. $y'' = \dfrac{5xy}{x^2 + 1} + y'$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, $x \in [-8, 0]$.
29.15. $y'' = \cos 3x + \sin 3y - \operatorname{arctg} y'$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;
$x \in [-2, 8]$.
29.16. $y'' = x \cos y \cdot \sin \cos y'$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $x \in [-8, 8]$.
29.17. $y'' = (y - 1)(y - 2) + xy'$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;
$x \in [-1, 1]$.
29.18. $y'' = \dfrac{\cos x + \operatorname{arctg} x - 1}{\sin y}$; $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$; $x \in [0, 2]$.
29.19. $y'' = \sqrt{x^2 + y^2 + y'^2}$; $y(-1) = -2$, $y'(-1) = 0$;
$x \in [-2, 0]$.
29.20. $y'' = \dfrac{e^x + \cos y}{y}$; $y(-2) = 1$, $y'(-2) = -1$, $x \in [-8, 0]$.
29.21. $y'' = y^2 y' + \cos \sin x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $x \in [-8, 0]$.
29.22. $y'' = x^2 \sin(x + y')$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $x \in [-1, 4]$.
29.23. $y'' = \operatorname{arctg}\left(x^2 + 2\right)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $x \in [-2, 0]$.
29.24. $y'' = \dfrac{\sin x}{\operatorname{arctg} y} + y$; $y(-1) = -1$, $y'(-1) = 0$, $x \in [-4, 0]$.
29.25. $y'' = x \operatorname{tg} x + y' \cos y$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $x \in [-1, 0]$.
29.26. $y'' = \dfrac{y}{x^2 + y'^2}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $x \in [-5, 0]$.
29.27. $y'' = \dfrac{x}{y^2 + y'^2}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, $x \in [-6, 6]$.
29.28. $y'' = \dfrac{x}{x^4 + y^4} + y$; $y(-3) = -1$, $y'(-3) = -1$;

$x \in [-7, -3]$.

29.29. $y'' = \dfrac{{y'}^2}{y - x} + y'$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $x \in [-3, 0]$.

29.30. $y'' = \dfrac{\cos x}{y(1 + y)}$; $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$, $x \in [-1, 1]$.

Контрольное задание №30

В каждом варианте на указанном отрезке приближенно решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений с помощью численного метода Рунге—Кутты четвертого порядка, использовав готовую компьютерную программу (или написав собственную), и построить соответствующую часть фазовой траектории. Шаг h взять ± 0.01:

30.1. $\begin{cases} x' = \sin t + \cos x, \\ y' = x^2 + y \cos t; \end{cases}$ $x(0) = -1$, $y(0) = 0$, $t \in [-1, 4]$.

30.2. $\begin{cases} x' = xt^2 + \operatorname{arctg} y, \\ y' = t - y - x^2; \end{cases}$ $x(0) = -1$, $y(0) = -1$;

$t \in [-2, 0]$.

30.3. $\begin{cases} x' = t + 2x + e^{1/x^2}, \\ y' = x + y - t; \end{cases}$ $x(0) = -1$, $y(0) = 1$, $t \in [-7, 0]$.

30.4. $\begin{cases} x' = 7 + y - 5x^2, \\ y' = 2t + x + y; \end{cases}$ $x(0) = -1$, $y(0) = -1$, $t \in [-2, 0]$.

30.5. $\begin{cases} x' = t + 2x + y + x^2, \\ y' = \operatorname{arctg}(t + x + y); \end{cases}$ $x(0) = -1$, $y(0) = -1$;

$t \in [-8, 3]$.

30.6. $\begin{cases} x' = tyx^2 + \dfrac{1}{y}, \\ y' = \dfrac{1}{x^2 + y^2} + \operatorname{arctg} x; \end{cases}$ $x(1) = 0$, $y(1) = -1$;

$t \in [-8, 1]$.

30.7. $\begin{cases} x' = x + y + 2x^2, \\ y' = t + \sin(x\cos y); \end{cases}$ $x(0) = 0\,,\quad y(0) = 0,\quad t \in [-2, 1].$

30.8. $\begin{cases} x' = \sin(5 - xy + t)\,, \\ y' = x - 2y; \end{cases}$ $x(1) = 0\,,\ y(1) = -1,\ t \in [1, 7].$

30.9. $\begin{cases} x' = 2t + \operatorname{arctg} x, \\ y' = y\cos x + \sin x; \end{cases}$ $x(0) = 1\,,\quad y(0) = 1,\quad t \in [-1, 0].$

30.10. $\begin{cases} x' = te^y, \\ y' = t^2 + yx^2; \end{cases}$ $x(1) = 1\,,\quad y(1) = 0,\quad t \in [-4, 1].$

30.11. $\begin{cases} x' = t^2 - x - y, \\ y' = t - x - y - y^2; \end{cases}$ $x(0) = 0\,,\quad y(0) = 0,\quad t \in [-1, 1].$

30.12. $\begin{cases} x' = yx^2 + t\operatorname{arctg} t, \\ y' = t + x + y\cos x; \end{cases}$ $x(0) = 1\,,\quad y(0) = 0,\quad t \in [-1, 0].$

30.13. $\begin{cases} x' = t + \sin x + \cos y, \\ y' = 3t + x - 2y; \end{cases}$ $x(0) = 1\,,\quad y(0) = 1,\quad t \in [0, 1].$

30.14. $\begin{cases} x' = t + \sin(x - y), \\ y' = t + 2x + 3y; \end{cases}$ $x(0) = 1\,,\quad y(0) = -1;$

$t \in [-2, 0].$

30.15. $\begin{cases} x' = y + \sin x, \\ y' = x + y + t^2; \end{cases}$ $x(0) = -1\,,\quad y(0) = -1,\quad t \in [-1, 0].$

30.16. $\begin{cases} x' = t + x + y^2, \\ y' = x + t^2 + y^3; \end{cases}$ $x(0) = 1\,,\quad y(0) = 1,\quad t \in [-1, 0].$

30.17. $\begin{cases} x' = x^2 - t^3, \\ y' = y - 5t + x^2; \end{cases}$ $x(0) = -1\,,\quad y(0) = 2,\quad t \in [0, 1].$

30.18. $\begin{cases} x' = x + t^2 + \dfrac{1}{y}\,, \\ y' = x + y + t^2; \end{cases}$ $x(0) = 1\,,\quad y(0) = -1,\quad t \in [-1, 1].$

30.19. $\begin{cases} x' = x + \operatorname{arctg} y, \\ y' = t + e^{-x}; \end{cases}$ $x(0) = 2\,, \quad y(0) = 0, \quad t \in [-2, 0].$

30.20. $\begin{cases} x' = x + y + \cos t, \\ y' = x^2 + y^2 + \sin t; \end{cases}$ $x(0) = 0\,, \quad y(0) = 0, \quad t \in [-4, 0].$

30.21. $\begin{cases} x' = \ln(x + y) - t, \\ y' = \dfrac{t}{x + y}\,; \end{cases}$ $x(0) = 3\,, \quad y(0) = 1, \quad t \in [0, 3].$

30.22. $\begin{cases} x' = x^2, \\ y' = t + x + y + x^3; \end{cases}$ $x(1) = 1\,, \quad y(1) = 0, \quad t \in [-6, 1].$

30.23. $\begin{cases} x' = y + x \cos t, \\ y' = 2 + \operatorname{arctg} x; \end{cases}$ $x(0) = 0\,, \quad y(0) = 1, \quad t \in [-1, 0].$

30.24. $\begin{cases} x' = \sin(xy) - 1, \\ y' = t + x + y^2; \end{cases}$ $x(0) = 0\,, \quad y(0) = -1, \quad t \in [0, 2].$

30.25. $\begin{cases} x' = \operatorname{arctg}\left(y^2\right), \\ y' = t + x; \end{cases}$ $x(1) = 0\,, \quad y(1) = 0, \quad t \in [-1, 1].$

30.26. $\begin{cases} x' = y + \cos \sin x, \\ y' = t + x + y; \end{cases}$ $x(0) = 0\,, \quad y(0) = 1, \quad t \in [-1, 0].$

30.27. $\begin{cases} x' = 5t + y - x^2 - t^3, \\ y' = \sin \operatorname{tg} \dfrac{x}{y}\,; \end{cases}$ $x(0) = 2\,, \quad y(0) = 2, \quad t \in [0, 2].$

30.28. $\begin{cases} x' = 1 + y + x^2, \\ y' = 2t - x + y^2; \end{cases}$ $x(0) = 1\,, \quad y(0) = -1, \quad t \in [-1, 0].$

30.29. $\begin{cases} x' = y + 2, \\ y' = t + x \cos y; \end{cases}$ $x(0) = -3\,, \quad y(0) = -3, \quad t \in [-3, 2].$

30.30. $\begin{cases} x' = y + t^2, \\ y' = 2t + \cos x; \end{cases}$ $x(0) = -2\,, \quad y(0) = -2, \quad t \in [-1, 1].$

18.3. Метод Адамса

Снова займемся решением задачи Коши (192), (193). Возьмем ту же сетку узлов $\mathbb{S}_h$, что и в п. 18.1.

Используя формулу Ньютона—Лейбница*

$$\int\limits_{x_j}^{x_j+h} y^{'}(x)dx = y(x)\Big|_{x=x_j}^{x=x_j+h} = y_{j+1} - y_j$$

и делая замену переменной интегрирования $x = x_j + th$ в левой части последнего равенства, после несложных преобразований получаем

$$y(x_j + h) = y_j + h\int\limits_0^1 y^{'}(x_j + th)dt,$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Если левую часть последнего равенства с помощью формулы Тейлора разложить по степеням h, а интеграл в правой части записать в следующем виде:

$$\int\limits_0^1 y^{'}(x_j + th)dt = \sum_{k=0}^{q} A_k y^{'}(x_j + \alpha_k h) + \varrho_q,$$

где A_k и α_k — пока неизвестные постоянные, ϱ_q — погрешность замены интеграла такой суммой, то придем к равенству:

$$y_j^{'}h + \frac{y_j^{''}}{2!}h^2 + \dots + \frac{y_j^{(s)}}{s!}h^2 + \frac{y_j^{(s+1)}(x_j + \theta h)}{(s+1)!}h^{s+1} =$$

$$= h\sum_{k=0}^{q} A_k y^{'}(x_j + \alpha_k h) + h\varrho_q, \quad 0 < \theta < 1. \quad (212)$$

* Г.В. Лейбниц (G.W. Leibniz, 1646—1716) — немецкий математик, физик и философ.

Разложим далее $y^{'}(x_j+\alpha_k h)$ по формуле Маклорена*:

$$y^{'}(x_j+\alpha_k h)=y_j^{'}+y_j^{''}\alpha_k h+\frac{y_j^{'''}}{2!}(\alpha_k h)^2+\ldots+\frac{y_j^{(s)}}{(s-1)!}(\alpha_k h)^{s-1}+$$
$$+\frac{y_j^{(s+1)}(x_j+\tilde{\theta}\alpha_k h)}{s!}(\alpha_k h)^s, \quad 0<\tilde{\theta}<1.$$

Подставив это разложение в правую часть равенства (212) и приравняв в обеих частях полученного равенства коэффициенты при одинаковых степенях h, будем иметь

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{q} A_k = 1, \\ \sum\limits_{k=0}^{q} A_k\alpha_k = \dfrac{1}{2}\,, \\ \sum\limits_{k=0}^{q} A_k\alpha_k^2 = \dfrac{1}{3}\,, \\ \qquad \vdots \\ \sum\limits_{k=0}^{q} A_k\alpha_k^{s-1} = \dfrac{1}{s}\,. \end{cases} \tag{213}$$

Положив в системе (213) $\alpha_k=-k, \quad k=0,1,2,\ldots,q$, приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $A_0,A_1,A_2,\ldots,A_q$:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{q} A_k = 1, \\ \sum\limits_{k=0}^{q} A_k k^l = \dfrac{(-1)^l}{k+1}\,, \quad l=1,2,\ldots,q. \end{cases}$$

* К. Маклорен (C. Maclaurin, 1698—1746) — шотландский математик.

В частности, при $q = 3$ эта система имеет вид

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = 1, \\ \quad A_1 + 2A_2 + 3A_3 = -\dfrac{1}{2}, \\ \quad A_1 + 4A_2 + 9A_3 = \dfrac{1}{3}, \\ \quad A_1 + A_2 + 27A_3 = -\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Ее решение

$$A_0 = \frac{55}{24}, \quad A_1 = -\frac{59}{24}, \quad A_2 = \frac{37}{24}, \quad A_3 = -\frac{3}{8}.$$

Итак, имеем

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{24}\left(55y_j^{'} - 59y_{j-1}^{'} + 37y_{j-2}^{'} - 9y_{j-3}^{'}\right) + r_{j+1}. \qquad (214)$$

Можно доказать (см. например [23]), что

$$r_{j+1} = \frac{251}{720}y_j^{(5)}h^5 + o(h^5). \qquad (215)$$

Так как $y^{'} = f\big(x, y(x)\big)$, то формулу (214) можно записать так:

$$y_{j+1} \approx y_j + \frac{h}{24}\left(55f_j - 59f_{j-1} + 37f_{j-2} - 9f_{j-3}\right), \qquad (216)$$

где использовано обозначение $f_l = f(x_l, y_l)$.

Формула (216) называется *экстраполяционной формулой Адамса.*

Эта формула четвертого порядка метода Адамса.

З а м е ч а н и е 1. Для начала вычислений по формуле (216) нужны значения y_0, y_1, y_2, y_3. Первое из них известно из начальных условий. Остальные находят, используя какой-либо другой метод, например, метод Рунге—Кутты. Зная y_0, y_1, y_2, y_3, находим y_4, по значениям y_1, y_2, y_3, y_4 вычисляем y_5 и т.д.

З а м е ч а н и е 2. Если ввести конечные разности

$$\begin{aligned} &\Delta y_j = \Delta^1 y_j = y_{j+1} - y_j, \\ &\Delta^k y_j = \Delta(\Delta^{k-1} y_j) = \Delta^{k-1} y_{j+1} - \Delta^{k-1} y_j, \\ &j = 0, 1, 2, \ldots, \quad k = 2, 3, 4, \ldots, \end{aligned}$$

то формулу (214) можно записать в виде

$$y_{j+1} = y_j + \varphi_j + \frac{1}{2}\Delta\varphi_{j-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\varphi_{j-2} + \frac{3}{8}\Delta^3\varphi_{j-3} + \frac{251}{720}\Delta^4\varphi_{j-4} + \ldots ,$$

где обозначено $\varphi_j = hf(x_j, y_j)$.

Если в равенстве

$$y_{j+1} = y_j + h\sum_{k=-1}^{q} A_k y^{'}(x_j + \alpha_k h) + hr_q,$$

аналогичном равенству (212), положить

$$\alpha_k = -k, \quad k = -1, 0, 1, 2, \ldots , q,$$

то, поступая так же, как и выше, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=-1}^{q} A_k = 1, \\ \sum\limits_{k=-1}^{q} A_k(-1)^l = \dfrac{1}{l+1}, \quad l = 1, 2, \ldots , q+1. \end{cases}$$

При $q = 2$ получаем формулу

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{24}\left(9f_{j+1} + 19f_j - 5f_{j-1} + f_{j-2}\right) + \varrho_{j+1}, \qquad (217)$$

где

$$\varrho_{j+1} = -\frac{19}{720}h^5 y_j^5 + o(h^5). \qquad (218)$$

Это — *интерполяционная формула Адамса* четвертого порядка. С использованием конечных разностей ее можно записать в виде

$$y_{j+1} = y_j + \varphi_{j+1} - \frac{1}{2}\Delta\varphi_j - \frac{1}{12}\Delta^2\varphi_{j-1} - \frac{1}{24}\Delta^3\varphi_{j-2} - \frac{19}{720}\Delta^4\varphi_{j-3} + \ldots .$$

Как следует из равенств (215) и (218), модуль главного члена погрешности формулы (217) приблизительно в 13 раз меньше по сравнению с формулой (214).

Поэтому вычисления при использовании метода Адамса обычно производят по схеме:

1) по формуле (214) находят y_{j+1};

2) с помощью значения y_{j+1}, найденного в предыдущем пункте, вычисляют новое значение y_{j+1} по формуле (217) (т.е. уточняют найденное в п. 1) значение).

З а м е ч а н и е. Величину шага h выбирают так, чтобы значения y_{j+1}, найденные по формулам (214) и (217), отличались бы только несколькими единицами младшего разряда, который определяется, исходя из заданной степени точности результата.

Пример 73. Рассмотрим ту же самую задачу Коши, что и в примере 72.

На сегменте $[0; 0.5]$ найти решение уравнения (208) при условиях (209).

Как и ранее, введем новую неизвестную функцию $u = \frac{dy}{dx}$, обозначим $f_1(x, y, u) = u, \quad f_2(x, y, u) = -2(y + xu)$ и будем решать соответствующую задачу Коши (210), (211). Возьмем снова шаг $h = 0.1$, положим $x_j = hj, \quad j = \overline{0, 5}$.

Значения $y_0 = 1, \quad u_0 = 2$ определены начальными условиями (211). Используем $y_j, u_j, \quad j = 1, 2, 3$, найденные в примере 72 методом Рунге—Кутты, $y_j, u_j, \quad j = 4, 5$, вычислим по экстраполяционной формуле Адамса (214) и уточним по интерполяционной формуле (217).

Т а б л и ц а 4

j	x_j	y_j	$u_j = f_{1j}$	f_{2j}	Δy_j	Δu_j
0	0.0	1.000000	2.000000	-2.000000		
1	0.1	1.189035	1.771454	-2.555216		
2	0.02	1.352607	1.492522	-3.003719		
3	0.03	1.486249	1.174962	-3.324986	0.100450	-0.342491
4	0.04	1.586698	0.832471	-3.506385	0.100522	-0.342786
		1.586771	0.832175	-3.506412	0.065530	-0.353413
5	0.05	1.652301	0.478718	-3.543960	0.065573	-0.353734
		1.652344	0.478441			

Результаты вычислений приведены в табл. 4 (для краткости введены обозначения $f_{1j} = f_1(x_j, y_j, u_j), \quad f_{2j} = f_2(x_j, y_j, u_j)$).

П р и м е ч а н и е. В данной таблице строки, соответствующие $j = 4$ и $j = 5$, разделены на две подстроки каждая. Верхняя из них соответствует результатам, найденным по экстраполяционной формуле (214), нижняя — интерполяционной (217). $\square$

З а м е ч а н и е. Имеются программы для компьютеров, реализующие метод Адамса различного порядка.

Контрольное задание №31

С помощью метода Адамса четвертого порядка (формулы (214) и (217)) приближенно решить задачу соответствующего варианта контрольного задания №28.

18.4. Нахождение решения в виде ряда

Решение дифференциального уравнения можно найти и в виде ряда.

Пример 74. Будем искать решение уже рассматривавшейся в примерах 72 и 73 задачи Коши для уравнения (208)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

в виде степенного ряда (обобщенного степенного ряда)

$$y(x) = x^p \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+p}, \tag{219}$$

где $p, a_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$ — вещественные числа.

Продифференцировав почленно ряд (219) два раза, имеем

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+p) x^{k+p-1},$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+p)(k+p-1) x^{k+p-2}.$$

После подстановки в исходное уравнение получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+p)(k+p-1)a_k x^{k+p-2} + x\sum_{k=0}^{\infty}(k+p)a_k x^{k+p-1} + 2\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+p} = 0,$$

или

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+p)(k+p-1)a_k x^{k+p-2}+\sum_{k=0}^{\infty}(k+p+2)a_k x^{k+p}=0,$$

или

$$p(p-1)a_0x^{p-2}+(p+1)pa_1x^{p-1}+\sum_{k=2}^{\infty}(k+p)(k+p-1)a_k x^{k+p-2}+ \\ +\sum_{k=0}^{\infty}(k+p+2)a_k x^{k+p}=0.$$

Положив в первом ряде $k=l+2$, получаем

$$p(p-1)a_0x^{p-2}+(p+1)pa_1x^{p-1}+\sum_{l=0}^{\infty}(l+p+2)(l+p+1)a_{l+2}x^{l+p}+ \\ +\sum_{k=0}^{\infty}(k+p+2)a_k x^{k+p}=0.$$

Если в первом ряде индекс суммирования l обозначить снова k и сложить почленно получаемые ряды, то будем иметь

$$p(p-1)a_0x^{p-2}+(p+1)pa_1x^{p-1}+ \\ +\sum_{k=0}^{\infty}(k+p+2)\big((k+p+1)a_{k+2}+a_k\big)x^{k+p}=0.$$

Для выполнения последнего равенства достаточно приравнять нулю коэффициенты при всех степенях x. Это приведет к следующей системе уравнений для p и a_k, $\quad k=0,1,2,\ldots$:

$$\begin{cases} p(p-1)a_0=0, \\ p(p+1)a_1=0, \\ (k+p+1)a_{k+2}=a_k, \quad k=0,1,2,\ldots \end{cases} \tag{220}$$

Положим сначала $p=1$, $\quad a_0\neq 0$. Тогда из второго уравнения системы следует, что $a_1=0$. Третье уравнение можно записать в виде

$$a_{k+2}=-\frac{a_k}{k+p+1},$$

а так как $p = 1$, то

$$a_{k+2} = -\frac{a_k}{k+2}\,. \qquad (221)$$

В силу $a_1 = 0$ из равенства (221) имеем последовательно $a_3 = 0$, $a_5 = 0, \dots, a_{2s-1} = 0, \dots$ Итак, $a_{2m-1} = 0$, $m = 1, 2, 3, \dots$ При $k = 2m$, $m = 0, 1, 2, \dots$, из равенства (221) находим

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{a_0}{2}\,,\\
a_4 &= -\frac{a_2}{2\cdot 2} = -\frac{a_0}{2^2\cdot 1\cdot 2}\,,\\
a_6 &= -\frac{a_4}{2\cdot 3} = -\frac{a_0}{2^3\cdot 1\cdot 2\cdot 3}\,,\\
&\vdots\\
a_{2s} &= -\frac{a_{2(s-1)}}{2(s+1)} = (-1)^s\frac{a_0}{2^s\cdot s!}\,,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Положим $a_0 = 1$. Тогда приходим к следующему частному решению y_1 уравнения (208):

$$y_1(x) = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{2^s\cdot s!}x^{2s+1} = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{2^2\cdot 2} - \dots \qquad (222)$$

По признаку Д'Аламбера* этот ряд сходится для любого вещественного x.

Положим теперь $\begin{cases} a_0 = 0,\\ a_1 \neq 0,\\ p = -1. \end{cases}$

Тогда третье уравнение системы (220) записывается так:

$$a_{k+2} = -\frac{a_k}{k}\,, \quad k = 1, 2, 3, \dots \qquad (223)$$

Положим $a_2 = 0$. Из равенства (223) следует, что $a_{2s} = 0$, $s = 2, 3, 4, \dots$ Далее, при $k = 2m - 1$, $m = 1, 2, 3, \dots$, имеем

$$a_{2m+1} = -\frac{a_{2m-1}}{2m-1}\,,$$

* Ж.Л. Д'Аламбер (J.L. D'Alambert, 1717—1783) — французский математик, механик и философ.

откуда

$$
\begin{aligned}
a_3 &= -\frac{a_1}{1}\,,\\
a_5 &= -\frac{a_3}{3} = \frac{a_1}{1\cdot 3}\,,\\
a_7 &= -\frac{a_5}{5} = -\frac{a_1}{1\cdot 3\cdot 5}\,,\\
&\vdots\\
a_{2s+1} &= (-1)^s\frac{a_1}{(2s-1)!!}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

(здесь обозначено $(2s-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2s-3)(2s-1)$).

Положим $a_1 = 1$. Получим второе частное решение уравнения (208):

$$
y_2(x) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s}{(2s-1)!!}x^{2s} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{1\cdot 3} - \frac{x^6}{1\cdot 3\cdot 5} + \ldots \qquad (224)
$$

Точно так же, как и ранее, по признаку Д'Аламбера проверяется, что ряд в правой части последнего равенства сходится для любого вещественного x.

Функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ линейно независимы на любом сегменте $[a,b]$, поэтому общее решение линейного однородного уравнения (208) имеет вид

$$
y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x), \qquad (225)
$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Решим теперь задачу Коши (208), (209).

Начальные условия (209) дают систему

$$
\begin{cases}
C_1y_1(0) + C_2y_2(0) = 1,\\
C_1y_1'(0) + C_2y_2'(0) = 2.
\end{cases}
$$

Так как $y_1(0) = 0$, $y_1'(0) = 1$, $y_2(0) = 1$, $y_2'(0) = 0$, то из последней системы сразу следует, что

$$
C_1 = 2, \quad C_2 = 1,
$$

и решением рассматриваемой задачи Коши является функция

$$y(x) = 2y_1(x) + y_2(x). \tag{226}$$

Вычислим приближенное значение $y\left(\frac{1}{2}\right)$ с точностью до 10^{-8}:

$$y_1\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2^3 \cdot 2 \cdot 1!} + \frac{1}{2^5 \cdot 2^2 \cdot 2!} - \frac{1}{2^7 \cdot 2^3 \cdot 3!} + \frac{1}{2^9 \cdot 2^4 \cdot 4!} + r_1 = \\ = \frac{86753}{196608} + r_1,$$

где $|r_1| < \frac{1}{2^{11} \cdot 2^5 \cdot 5!} < 0.13 \cdot 10^{-8}$ $\big($полученный ряд для $y\left(\frac{1}{2}\right)$ есть знакочередующийся ряд, удовлетворяющий условиям теоремы Лейбница, поэтому модуль остатка r_1 меньше модуля первого его члена$\big)$,

$$y_2\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4 \cdot 3!!} - \frac{1}{2^6 \cdot 5!!} + \frac{1}{2^8 \cdot 7!!} - \frac{1}{2^{10} \cdot 9!!} + r_2 = \frac{744947}{967680} + r_2,$$

где $|r_2| < \frac{1}{2^{12} \cdot 11!!} < 0.24 \cdot 10^{-9}$,

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = 2y_1\left(\frac{1}{2}\right) + y_2\left(\frac{1}{2}\right) = 1.65232497 + r,$$

$$|r| < 2|r_1| + |r_2| = 0.26 \cdot 10^{-8} + 0.24 \cdot 10^{-9} < 0.3 \cdot 10^{-8}. \qquad \square$$

Пример 75. Решим следующую *краевую задачу.*
На сегменте $[0, 1]$ найти решение уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + 2y = 2, \tag{227}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$y(0) = 1, \quad y(1) = 0. \tag{228}$$

Общее решение уравнения (227) имеет вид

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + 1, \tag{229}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ найдены в примере 74. Подставив это выражение $y(x)$ в граничные условия (228), получим

$$\begin{cases} C_1y_1(0) + C_2y_2(0) + 1 = 1, \\ C_1y_1(1) + C_2y_2(1) + 1 = 0, \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} C_1y_1(0) + C_2y_2(0) = 0, \\ C_1y_1(1) + C_2y_2(1) = -1. \end{cases}$$

Так как $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$, то из первого уравнения следует $C_2 = 0$, из второго $C_1 = -\frac{1}{y_1(1)}$, $y_1(1) = 0.6065306 + \varrho$, $0 < \varrho < 10^{-7}$ (значение $y_1(1)$ вычисляется аналогично предыдущему).

Итак, имеем

$$y(x) = 1 - \frac{y_1(x)}{y_1(1)} \approx -1.6487215 \cdot y_1(x) + 1. \quad \square$$

Найти решения в виде степенных рядов следующих задач Коши (задачи взяты из сборника [6]):

141. $(1-x)y' + y = x + 1, \quad y(0) = 0.$
142. $xy'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$
143. $xy'' + 2y' + xy = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$
144. $xy'' + y' + xy = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

§19. Решение краевой задачи методом прогонки

Рассмотрим следующую *краевую (граничную) задачу* для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка: на сегменте $[a, b]$ найти решение $y(x)$ уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x) \tag{230}$$

($p(x), q(x), f(x)$ — заданные непрерывные на сегменте $[a, b]$ функции), удовлетворяющее граничным условиям

$$y(a) = A, \quad y(b) = B, \tag{231}$$

A и B — заданные вещественные числа.

Вначале получим некоторые аппроксимации производных функции $y(x)$. Возьмем произвольное $x \in [a, b]$ и близкие к нему $x+h$ и $x-h$, $\quad x+h \in [a, b], x-h \in [a, b]$.

Использовав формулу Тейлора, найдем

$$y(x+h) = y(x) + y^{'}(x)h + \frac{1}{2}y^{''}(x)h^2 + \frac{1}{6}y^{'''}(x)h^3 + \frac{1}{24}y^{(IV)}(x+\theta_1 h)h^4,$$

$$y(x-h) = y(x) - y^{'}(x)h + \frac{1}{2}y^{''}(x)h^2 - \frac{1}{6}y^{'''}(x)h^3 + \frac{1}{24}y^{(IV)}(x+\theta_2 h)h^4,$$

$$0 < \theta_1 < 1, \quad 0 < \theta_2 < 1.$$

Сложив и вычтя последние равенства, будем иметь

$$y^{''}(x) = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} - \\ - \frac{h^2}{24}\big(y^{(IV)}(x+\theta_1 h) + y^{(IV)}(x+\theta_2 h)\big), \quad (232)$$

$$y^{'}(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{12}\big(y^{'''}(x+\theta_3 h) + y^{'''}(x+\theta_4 h)\big), \ (233)$$

$$0 < \theta_3 < 1, \quad 0 < \theta_4 < 1$$

(при получении последнего равенства в разложении по формуле Тейлора ограничиваемся лишь слагаемыми, содержащими степени не выше третьей).

Из равенств (232) и (233) следует, что

$$y^{''}(x) \approx \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2},$$

$$y^{'}(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h},$$

причем абсолютная погрешность каждого из этих приближенных значений равна $O(h^2)$.

Разобьем далее сегмент $[a, b]$ на n равных частей точками $x_j = a + jh, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n, \quad h = \frac{b-a}{n}$, возьмем в равенствах (233) и (234) $x = x_j$ и подставим полученные выражения $y^{''}(x_j)$, $y^{'}(x_j)$ в исходное уравнение (230), отбросив остаточные члены, содержащие h^2.

Тогда граничная задача (230), (231) будет аппроксимирована системой линейных алгебраических уравнений (или, как говорят, *конечно–разностной схемой*)

$$\begin{cases} \dfrac{y_{j+1}-2y_j+y_{j-1}}{h^2}+p_j\dfrac{y_{j+1}-y_{j-1}}{2h}+q_jy_j=f_j, \\ j=1,2,3,\ldots,n-1, \\ y_0=A, \quad y_n=B, \end{cases}$$

где $p_j = p(x_j)$, $q_j = q(x_j)$, $f_j = f(x_j)$, относительно неизвестных $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$. Если обозначить

$$\alpha_j=\frac{1}{h^2}-\frac{p_j}{2h}\,, \quad \beta_j=q_j-\frac{2}{h^2}\,, \quad \gamma_j=\frac{1}{h^2}+\frac{p_j}{2h}\,,$$

то рассматриваемая система запишется в виде

$$\begin{cases} \alpha_jy_{j-1}+\beta_jy_j+\gamma_jy_{j+1}=f_j, \\ j=1,2,3,\ldots,n-1, \\ y_0=A, \quad y_n=B. \end{cases} \tag{234}$$

Это система с трехдиагональной матрицей: на главной диагонали матрицы расположены числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$, под ней — $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1}$, над ней — $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-2}$, остальные элементы матрицы равны нулю:

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{n-2} & \beta_{n-2} & \gamma_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Такие системы удобно решать *методом прогонки.* Опишем его. Положим

$$y_j = A_jy_{j+1}+B_j, \tag{235}$$

где A_j, B_j — неизвестные пока числа, $j = 1, 2, 3, \dots, n-1$, и подставим соответствующие $y_{j-1} = A_{j-1}y_j + B_{j-1}$ в первое уравнение системы (234):

$$\alpha_j(A_{j-1}y_j + B_{j-1}) + \beta_j y_j + \gamma_j y_{j+1} = f_j,$$

откуда находим

$$y_j = -\frac{\gamma_j}{\alpha_j A_{j-1} + \beta_j} y_{j+1} + \frac{f_j - \alpha_j B_{j-1}}{\alpha_j A_{j-1} + \beta_j}\,.$$

Последнее равенство имеет вид (235), где

$$A_j = -\frac{\gamma_j}{\alpha_j A_{j-1} + \beta_j}, \quad B_j = \frac{f_j - \alpha_j B_{j-1}}{\alpha_j A_{j-1} + \beta_j}. \tag{236}$$

Равенство $y_0 = A$ можно записать в виде $y_0 = 0 \cdot y_1 + A$, т. е. также в виде (235), где $A_0 = 0, \quad B_0 = A$. Используя это, можно по формулам (236) найти (при $j = 1$) A_1 и B_1, затем по значениям A_1, B_1 при $j = 2$ с помощью этих же формул определить A_2, B_2, затем A_3, B_3, A_4, B_4,…,A_n, B_n (вычисление по формулам (236) значений A_1, B_1, A_2, B_2,…,A_n, B_n называется *прямой прогонкой*).

Используя последнее из равенств (234) $y_n = B$, при $j = n-1$ из формулы (235) находим y_{n-1}, далее при $j = n-2$ и уже известном y_{n-1} из формулы (235) находим y_{n-2}, затем $y_{n-3}, \dots, y_2, y_1$ (процесс нахождения по формулам (235) $y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_2, y_1$ называется *обратной прогонкой*).

Таким образом, решение $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ системы (234) найдено.

Как следует из равенств (232), (233), погрешность аппроксимации задачи (230), (231) системой (234) имеет порядок $O(h^2)$.

Пример 76. На промежутке $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ найти решение краевой задачи

$$y'' + y = 1,$$
$$y(0) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Точное решение задачи $y(x) = 1 - \sin x$.

Решим теперь эту задачу методом прогонки. Возьмем $n = 10$. Тогда $h = \frac{\pi}{40}$. Так как $p(x) = 0, \quad q(x) = f(x) = 1$, то $\alpha_j = \gamma_j = \frac{1}{h^2}, \quad \beta_j = 1 - \frac{2}{h^2}$, $j = 1, 2, 3, \dots, n-1$. Здесь $A = 1$, $B = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$

В табл. 5 приведены результаты вычислений по формулам (236) и (235). □

Т а б л и ц а 5

j	x_j	Прямая прогонка		Обратная прогонка	$1-\sin x_j$
		A_j	B_j	y_j	
0	0			1	1
1	$\frac{\pi}{40}$	0.501547	0.498453	0.921536	0.921541
2	$2\cdot\frac{\pi}{40}$	0.670113	0.329886	0.843557	0.843566
3	$3\cdot\frac{\pi}{40}$	0.755448	0.244552	0.766543	0.766555
4	$4\cdot\frac{\pi}{40}$	0.807504	0.192496	0.690968	0.690983
5	$5\cdot\frac{\pi}{40}$	0.842938	0.157062	0.617300	0.617317
6	$6\cdot\frac{\pi}{40}$	0.868890	0.131110	0.545998	0.546010
7	$7\cdot\frac{\pi}{40}$	0.888935	0.111065	0.477486	0.477501
8	$8\cdot\frac{\pi}{40}$	0.905062	0.949378	0.412203	0.412215
9	$9\cdot\frac{\pi}{40}$	0.918468	0.815317	0.350545	0.350552
10	$10\cdot\frac{\pi}{40}$			0.292893	0.292893

Использовав готовую компьютерную программу (или написав собственную), построить на промежутке $[-1, 1]$ полученный методом прогонки график приближенного решения дифференциального уравнения

$$y'' + \frac{1}{x+2}y' - \left(1 + \sin^2\left(x^3+1\right)\right)y = x,$$

удовлетворяющего граничным условиям (взять $n = 200$):

145. $y(-1) = y(1) = 0$.

146. $y(-1) = 0.5\,, \quad y(1) = -2$.

Контрольное задание №32

В каждом варианте на отрезке, определяемом граничными условиями, с помощью метода прогонки, использовав готовую компьютерную программу (или написав собственную), найти приближенное решение краевой задачи для линейного дифференциального уравнения второго порядка и построить его график (взять n таким, чтобы шаг h получился 0.01):

32.1. $y'' - \ln(x+1)y' + \cos x \cdot y = 2\,; \quad y(1) = 1\,, \quad y(3) = 0$.

32.2. $y'' + \dfrac{x}{x^3+2}y' + y = 5x + 2\,; \quad y(-1) = 0\,, \quad y(1) = 2$.

32.3. $y'' + e^x y' - (\cos x + \sin x)y = 5\,; \quad y(0) = 0\,, \quad y(1) = 0$.

32.4. $y'' - \dfrac{1}{\ln x} y' - \dfrac{\cos x}{e^x} y = \operatorname{arctg} x\,; \quad y(2) = 1\,, \quad y(3) = 1.$
32.5. $y'' - (5x+3)y' - 8 \sin \cos x \cdot y = 4\,; \quad y(-2) = 0\,, \ y(1) = 1.$
32.6. $y'' - xy' + 5x^3 y = \operatorname{arctg} x\,; \quad y(-1) = 1\,, \quad y(1) = -1.$
32.7. $y'' - \cos 3x \cdot y' + e^{x^2} y = 2 \cos x\,; \quad y(-1) = -1\,, \quad y(1) = 1.$
32.8. $y'' + \dfrac{17x}{1+x^2} y' + \ln(1-x) y = 6x\,; \ y(-3) = 1\,, \ y(-1) = -1.$
32.9. $y'' + \dfrac{15x}{e^{2x}} y' = x^3\,; \quad y(-1) = 0\,, \quad y(0) = 2.$
32.10. $y'' - x \cos x \cdot y' + \dfrac{x}{\ln x} y = x\,; \quad y(2) = 0\,, \quad y(3) = 1.$
32.11. $y'' - \dfrac{1}{x^2} y' + x \sin x \cdot y = 1\,; \quad y(1) = 3\,, \quad y(3) = -1.$
32.12. $y'' + xe^x y' + y = \ln x\,; \quad y(1) = 1\,, \quad y(2) = 0.$
32.13. $y'' - \sin \sqrt{x} \cdot y' + e^x y = \dfrac{1}{x^2}\,; \quad y(1) = 1\,, \quad y(3) = 1.$
32.14. $y'' - \dfrac{x}{e^x} y' - \dfrac{x}{e^{2x}} y = x^2\,; \quad y(-1) = 0\,, \quad y(1) = 1.$
32.15. $y'' + x^2 y' - \dfrac{\sin x}{x} y = x^3\,; \quad y(1) = 0\,, \quad y(2) = 1.$
32.16. $y'' + 2xy' - \dfrac{x}{\ln(1+x^2)} y = e^x\,; \quad y(1) = 2\,, \quad y(3) = -2.$
32.17. $y'' - 2y' + x \sin x \cdot \cos \sin x \cdot y = \ln(1+e^x)\,; \quad y(-3) = 0\,,$
$y(1) = 1.$
32.18. $y'' + x \cos x \cdot y' - xy = 0\,; \quad y(0) = 0\,, \quad y(2) = 1.$
32.19. $y'' - xy' + \dfrac{x^2}{1+x^2} y = x \ln x\,; \quad y(1) = 0\,, \quad y(3) = 2.$
32.20. $y'' + \dfrac{\sin x}{x} y' + \dfrac{\cos x}{x} y = \dfrac{e^x}{x}\,; \quad y(1) = 0\,, \quad y(2) = 1.$
32.21. $y'' - \cos e^x \cdot y' + \sin x \cdot y = 1 - x\,; \quad y(-1) = 0\,, \quad y(1) = 0.$
32.22. $y'' + 2y' + \dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{x} y = 5x \sin x\,; \quad y(-2) = 0\,, \quad y(-1) = 3.$
32.23. $y'' - x^2 \sin^6 x \cdot y' + y = 8x + 5\,; \quad y(1) = 0\,, \quad y(2) = -1.$
32.24. $y'' + \sin^2 x \cdot y = \operatorname{arctg} 2x\,; \quad y(0) = 2\,, \quad y(3) = 0.$
32.25. $y'' + y' + \dfrac{x^2 \ln x}{e^x} y = \dfrac{1}{x}\,; \quad y(1) = 0\,, \quad y(5) = 2.$
32.26. $y'' + x \sin x \cdot y' + \left(1 + \cos^2 x\right) y = 1\,; \ y(-1) = -1\,, \ y(1) = 1.$
32.27. $y'' + \dfrac{1}{x} y' + x^7 y = 18 \sin e^x\,; \quad y(1) = 0\,, \quad y(2) = 0.$
32.28. $y'' - \operatorname{ctg} \dfrac{1}{x} \cdot y' + y = \dfrac{1}{x^2}\,; \quad y(1) = 1\,, \quad y(5) = 1.$
32.29. $y'' - \operatorname{arctg} x \cdot y' + \sin x \cdot y = 0\,; \quad y(-1) = -1\,, \quad y(1) = 1.$
32.30. $y'' - x \cos x \cdot y' + e^x y = \cos x \cdot \sin x\,; \ y(-2) = 0\,, \ y(2) = 0.$

ОТВЕТЫ

1. $xy' = 3y$.
2. $y'^2 + y^2 = 1$.
3. $xy - 2y^2 + \left(x^2 - xy + y^2\right) y' = 0$.
4. $x - y + 3 + (3x + y + 1)y' = 0$.
5. $y'^2 + y' - xy' + y = 0$.

6. Рис. 62. Выделенные линии — изоклины. Их уравнение $y = k - x$. Сравните полученный ответ с полем интегральных кривых, построенным на основе аналитического решения $y = Ce^x - x - 1$. Способ решения подобных уравнений см. в §5.

Экстремумы (минимумы)

y

O $\quad$ x

$k = -1 \quad 0 \quad 1$

Рис. 62.

y

$-1 \quad \infty \quad 1$

$k = 0$

O $\quad$ x

Рис. 63.

7. Рис. 63. Здесь изоклины задаются уравнением $y = kx$ и состоят, таким образом, из решений. Сравните полученный ответ с полем интегральных кривых, построенным на основе аналитического решения $y = Cx$. Способ решения подобных уравнений см. в §3 или 5.

8. Рис. 64. Выделенные линии — изоклины. Их уравнение: $\cos(x - y) = k$. При $k = 0$ имеем уравнение $y = x + \pi\left(l - \frac{1}{2}\right)$, при $k = 1$ уравнение $y = x + 2\pi l$, при $k = -1$ уравнение $y = x + \pi(2l + 1)$. Сравните полученный ответ с полем интегральных кривых, построенным на основе аналитического решения $y = x - 2\,\mathrm{arctg}(x + C) + \pi(2l - 1)$, где $l \in \mathbb{Z}$. Исходное уравнение заменой неизвестной функции $z(x) = x - y(x)$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными, способ решения которых см. в § 3.

9. Рис. 65. Выделенные линии — изоклины. Их уравнение $y = x^2 + 2x - k$. Также указана линия, состоящая из точек перегиба. Ее уравнение $y = x^2 - 2$. Интегральная кривая $y = x^2$ разделяет таковые с точкой перегиба и без нее. Сравните полученный ответ с полем интегральных кривых, построенным на основе аналитического решения $y = Ce^{-x} + x^2$. Способ решения подобных уравнений см. в § 5.

$k = 0$ *(максимумы)* -1 1 $k = -1$ $y = x^2$ 0 *(экстремумы)*

y y

π 1

$-\pi$ π

O x O x

Перегибы

$k = 0$ *(минимумы)*

Рис. 64. Рис. 65.

y

$k = 0$ -1 ∞

(экстремумы)

1

O x

Рис. 66.

10. Рис. 66. Выделенные линии — изоклины. Их уравнения: $y = \frac{k-1}{k+1}x$. Сравните полученный ответ с полем интегральных кри-

вых, построенным на основе аналитического выражения общего интеграла: $\ln\left(x^2+y^2\right)=2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+C$. Способ решения подобных уравнений см. в §4. При построении на компьютере интегральных кривых удобно перейти к полярной системе координат, в которых общий интеграл имеет вид $\rho=e^{\varphi+C}=De^{\varphi}$, где $D=e^C>0$.

11. $x=-1,\ (y>0)$.
12. $\ln x=\sqrt{y^2+1}$.
13. $y=2-3\cos x$.
14. $y=e^{\frac{1}{1-x}}$.
15. $y^2+2y=x^2-2x+2\ln\left(\frac{x+1}{y-1}\right)+8$.
16. $x(y-x)=Cy$.
17. $Cx=e^{\cos(y/x)}$.
18. $\sin\frac{y}{x}=Cx$.
19. $y=\frac{C}{2}x^2-\frac{1}{2C}$, $\quad (C>0)$.
20. $C\sqrt{x^2+y^2}=y^2+2x^2$.
21. $y=Cx^2+x^4$.
22. $xy=\left(x^3+C\right)e^{-x}$.
23. $y=\operatorname{arctg}x-1+Ce^{-\operatorname{arctg}x}$.
24. $x=y^2+Cy$. Указание. Принять за неизвестную функцию x.
25. $x=Ce^{y^2}-y^2$. Указание. Принять за неизвестную функцию x.
26. $\left(e^x+Ce^{2x}\right)y=1$.
27. $y^3=Cx^3-3x^2$.
28. $xy\left(C-\ln^2 y\right)=1$. Указание. Принять за неизвестную функцию x.
29. $\left(C\cos^3 x-3\sin x\cos^2 x\right)y^3=1$.
30. $y=\left(1+x^2\right)\left(\operatorname{arctg}^2 x+C\right)^2$.
31. $x^4-2x^2y^3+y^6=C$.
32. $x+\frac{x^3}{y^2}+\frac{5}{y}=C$.
33. $x^3\operatorname{tg}y+y^4+\frac{y^3}{x^2}=C$.
34. $y\sqrt{1+x^2}+x^2y-y\ln x=C$.
35. $x^2+1=2(C-2x)\sin y$.
36. $y=Cx-C^2$; $\quad 4y=x^2$.
37. $2C^2(y-Cx)=1$; $\quad 8y^3=27x^2$.
38. $\begin{cases} x=C(p+1), \\ y=\frac{C}{2}p^2 \end{cases}$ или $y=\frac{(x-C)^2}{2C}$; $\quad y=0$; $\quad y=-2x$.

39. $\begin{cases} x = \frac{C}{(p-1)^2} + 2p + 1, \\ y = \frac{Cp^2}{(p-1)^2} + p^2; \end{cases} \qquad y = x - 2; \quad y = 0.$

40. $\begin{cases} x = \frac{C}{p^3} - 2e^p\left(\frac{1}{p} - \frac{2}{p^2} + \frac{2}{p^3}\right), \\ y = \frac{3C}{2p^2} - 2e^p\left(1 - \frac{3}{p} + \frac{3}{p^2}\right); \end{cases} \qquad y = 1.$

41. $y = \cos x + x^4 + C_1x^2 + C_2x + C_3$.
42. $y = xe^x + C_1x + C_2$.
43. $y = -\ln|x| + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$.
44. $y = \frac{x^2-1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C_1x + C_2$.
45. $y = C_1(x+2)e^{-x} + C_2x + C_3$.
46. $y = \left(C_1x - C_1^2\right)e^{\frac{x}{C_1}+1} + C_2$.
47. $y = x^3 + C_1x^{3/2} + C_2$.
48. $y = -x - C_1\ln|x - C_1| + C_2; \quad y = C$.
49. $y^3 + C_1y = 3x + C_2; \quad y = C$.
50. $C_1\ln|y| - \ln^2|y| = 2x + C_2; \quad y = C$.
51. $\ln\left|\frac{y}{y+C_1}\right| = C_1x + C_2; \quad y = C$.
52. $2x + C_2 = C_1e^{-y} + 2y - y^2; \quad y = C$.
53. $y = C_2e^{C_1x^3}$.
54. $2\ln|y| = e^{-x}(\sin x - \cos x + C_1) + C_2; \quad y = 0$.
55. $y = C_2x^2e^{C_1x^2}$.
56. $y^2 = C_1x^6 + C_2$.
57. $y = -(x+3)e^{-x} + \frac{3}{2}x^2 + 3$.
58. $y = 2\sqrt{x}$.
59. $y = 2\ln(x+1)$.
60. $2y + 1 + \sqrt{4x-3} = 0$.
61. $y = C_1\cos kx + C_2\sin kx$.
62. $y = C_1e^{ax} + C_2e^{-ax}$.
63. $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{5x}$.
64. $y = (C_1 + C_2x)e^{3x}$.
65. $y = e^{-2x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$.
66. $y = \left(Ax^2 + Bx + C\right)\cos 3x + \left(Dx^2 + Ex + F\right)\sin 3x$.
67. $y = x(Ax + B)e^{2x}$.
68. $y = x^2\left(Ax^2 + Bx + C\right)e^x$.
69. $y = e^x(A + B\cos 2x + C\sin 2x)$.
70. $y = Ax + B + x(Cx + D)\cos 2x + x(Ex + F)\sin 2x$.
71. $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + (10x + 24)\cos 2x + (30x + 7)\sin 2x$.
72. $y = e^{2x}(C_1 + C_2x - \sin x)$.

73. $y = C_1 e^{3x} + e^{-x}\left(C_2 + x^3 + x^2 + x\right)$.
74. $y = e^{-x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 2x^2 - 1\right)$.
75. $y = (C_1 - x)\cos 2x + \left(C_2 - 2x^2\right)\sin 2x + 4x$.
76. $y = \left(C_1 + \ln|\cos x|\right)\cos x + (C_2 + x)\sin x$.
77. $y = C_1 e^x + C_2 - \cos e^x$.
78. $y = e^x\left(C_1 x + C_2 + x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right)$.
79. $y = (C - 4x)\cos 2x + \left(\ln\sin^4 x + C_2\right)\sin 2x$.
80. $y = (C_1 + 4\sqrt{\operatorname{ctg} x})\cos x + C_2 \sin x$.
81. $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{2x} + C_4 \cos x + C_5 \sin x$.
82. $y = C_1 + e^{3x}(C_2 \cos x + C_3 \sin x) + x^3 + 2x^2 + 3x$.
83. $y = C_1 e^x + e^{-2x}\left(C_2 + C_3 x + C_4 x^2 + \cos x\right)$.
84. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + \cos x(C_3 + 3x) + \sin x(C_4 + x)$.
85. $y = C_1 e^{-x} + e^{2x}(C_2 + C_3 x) + 8\sqrt{x}$.
86. $y = C_1 x + \frac{C_2}{x^2}$.
87. $y = x^3\left(C_1 + C_2 \ln|x|\right)$.
88. $y = x\left(C_1 + C_2 \ln|x| + C_3 \ln^2|x|\right)$.
89. $y = x^2(C_1 - \ln x) + C_2 x^5$.
90. $y = C_1 x^3 + C_2 - x^2(2\ln x + 1)$.
91. $\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{5t}, \\ y = -C_1 e^{2t} + 2C_2 e^{5t}. \end{cases}$
92. $\begin{cases} x = e^t(C_1 \cos t + C_2 \sin t), \\ y = e^t\left((C_2 - 4C_1)\cos t - (C_1 + 4C_2)\sin t\right). \end{cases}$
93. $\begin{cases} x = C_1 + C_2 e^t, \\ y = 3C_1 + C_3 e^t, \\ z = -C_1 + (C_2 - C_3)e^t. \end{cases}$
94. $\begin{cases} x = (C_1 + t)e^t + C_2 e^{-t}, \\ y = (C_1 + t + 1)e^t + 3C_2 e^{-t}. \end{cases}$
95. $\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \operatorname{tg} t, \\ y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + 2. \end{cases}$

O y

Рис. 67.

96. Рис. 67.

97. Рис. 68.

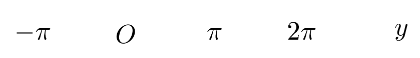

Рис. 68.

98. Рис. 69. Семейство эллипсов $\frac{y'^2}{2} + 2y^2 = C$.

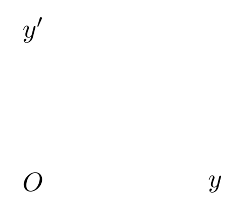

Рис. 69.

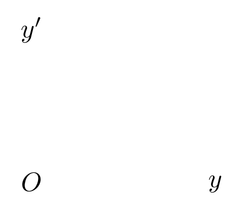

Рис. 70.

99. Рис. 70. Семейство парабол $(y' + 2y)^2 = C\,(y' + y)$. При их построении на компьютере удобно перейти к косоугольной системе координат Ox_1y_1 по формулам

$$\begin{cases} y = x_1 - y_1, \\ y' = 2y_1 - x_1. \end{cases}$$

Оси этой косоугольной системы координат — прямые линии $y' = -2y$ и $y' = -y$. Они являются фазовыми траекториями уравнения, соответствующими значениям $C = 0$ и $C = +\infty$.

100. Рис. 71. Семейство спиралей, заданных формулой $\sqrt{y'^2 + 2yy' + 2y^2} = Ce^{\operatorname{arctg}\left(1+\frac{y'}{y}\right)}$. При построении графиков на компьютере удобно перейти к полярной системе координат

$\begin{cases} y = \rho\cos\varphi, \\ y' = \rho\sin\varphi, \end{cases}$ в которой уравнение фазовых траекторий имеет вид

$$\rho = \frac{Ce^{\operatorname{arctg}(1+\operatorname{tg}\varphi)}}{\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\sin\left(2\varphi+\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}}\,.$$

y' z

O y O y

Рис. 71. Рис. 72.

101. Седло (рис. 72). Уравнения кривых на плоскости Oyz имеют вид $(y+z)(2z-y)^5 = C$. При их построении на компьютере удобно перейти к косоугольной системе координат Oy_1z_1 по формулам

$$\begin{cases} y = \frac{y_1+z_1}{3}\,, \\ z = \frac{2z_1-y_1}{3}\,. \end{cases}$$

Оси этой косоугольной системы координат — прямые линии $2z = y$ и $z = -y$, являющиеся фазовыми траекториями при $C = 0$.

102. Неустойчивый фокус (рис. 73). Уравнения кривых на плоскости Oyz имеют вид

$$\sqrt{z^2 - yz + 2y^2} = Ce^{\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\frac{y-2z}{\sqrt{7}y}\right)}.$$

При построении графиков на компьютере удобно перейти к полярной системе координат $\begin{cases} y = \rho\cos\varphi, \\ z = \rho\sin\varphi, \end{cases}$ в которой уравнение фазовых траекторий имеет вид

$$\rho = \frac{Ce^{\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1-2\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{7}}\right)}}{\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(2\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}}.$$

z z

O y O y

Рис. 73. Рис. 74.

z z

O y O y

Рис. 75. Рис. 76.

103. Неустойчивый узел (рис. 74). Уравнения кривых на плоскости Oyz имеют вид $C(y-z)^5 = y+3z$. При их построении на компьютере удобно перейти к косоугольной системе координат Oy_1z_1 по формулам

$$\begin{cases} y = \frac{3y_1+z_1}{4}, \\ z = \frac{z_1-y_1}{4}. \end{cases}$$

Оси этой косоугольной системы координат — прямые линии $z = y$ и $z = -\frac{y}{3}$, являющиеся фазовыми траекториями при $C = 0$ и $C = \infty$.

104. Неустойчивый дикритический узел (рис. 75). Уравнения кривых (являющихся в этом случае прямыми) на плоскости Oyz имеют вид $z = Cy$.

105. Устойчивый вырожденный узел (рис. 76). Уравнения кривых на плоскости Oyz имеют вид

$$z + y = Ce^{\frac{y}{y+z}}.$$

При построении графиков на компьютере удобно перейти к полярной системе координат $\begin{cases} y = \rho\cos\varphi, \\ z = \rho\sin\varphi, \end{cases}$ в которой уравнение фазовых траекторий имеет вид

$$\rho = \frac{Ce^{\frac{1}{1+\operatorname{tg}\varphi}}}{\sqrt{2}\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)}.$$

106. Положения $(1, 2)$, $(2, 1)$ — неустойчивые положения равновесия.

107. Положение $(2, 1)$ — асимптотически устойчивое положение равновесия, положение $(-2, 1)$ — неустойчивое положение равновесия.

108. Положения $(2k\pi, 0)$ — неустойчивые положения равновесия, положения $\big((2k+1)\pi, 0\big)$ — асимптотически устойчивые положения равновесия.

109. Положение $(-4, -4)$ — асимптотически устойчивое положение равновесия, положение $(1, 1)$ — неустойчивое положение равновесия.

110. Положение равновесия $(0, 0)$. Так как $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} = 0$, то теорема Ляпунова ответа не дает, и требуется дополнительное исследование, см. [2,9].

111. 30°. Р е ш е н и е. По закону Ньютона, количество теплоты dQ, которое шар отдает за промежуток времени dt, пропорционально разности между температурой тела и температурой среды, т. е.

$$dQ = -k(T - T_1)dt.$$

Вместе с тем $dQ = mC\,dT$, где m — масса тела, а C — его теплоемкость. Поэтому получаем уравнение

$$\frac{dT}{dt} = -a(T - T_1),$$

где T — температура, t — время и $a = \frac{k}{mC}$. Интегрируя, получаем

$$T = T_1 + C_1 e^{-at}.$$

Из условия $T = 100$ при $t = 0$ определяем $C_1 = 80$. Следовательно,

$$T = 20 + 80e^{-at}.$$

Значение a находим из уравнения $60 = 20 + 80e^{-20a}$, откуда $e^{-a} = 2^{-\frac{1}{20}}$. Поэтому

$$T = 20 + 80 \cdot 2^{-\frac{t}{20}}.$$

При $t = 60$ получаем $T = 30$.

112. 0.0658 г. Р е ш е н и е. Из уравнения $dm = km\,dt$ получаем закон роста колонии во времени $m = m_0 e^{kt}$. Вычисляем k, исходя из начальных данных: $k = 0.0915$. Следовательно, при $t = 3$ находим $m_3 \approx 0.0658$.

113. $y = \frac{k_1 y_0}{k_2\left(y_0 + \left(\frac{k_1}{k_2} - y_0\right)e^{-k_1 t}\right)}$, $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = \frac{k_1}{k_2}$. Популяция растет при $\frac{k_1}{k_2} > y_0$, вымирает лишь при $k_1 = 0$, т. е. при прекращении рождаемости. У к а з а н и е. $y' = k_1 y - k_2 y^2$.

114. $y(t) = \begin{cases} e^{kt}\left(\left(q - \frac{\beta p}{k-\alpha}\right) + \frac{\beta p}{k-\alpha} e^{-(k-\alpha)t}\right), & \text{если } \alpha \neq k, \\ e^{kt}(q - \beta p t), & \text{если } \alpha = k. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Пусть q — первоначальное число жертв, а p — первоначальное число хищников, $z(t)$ — численность хищников в момент t, $y(t)$ — численность жертв в момент t.

Так как считается, что жертв достаточно много, т. е. условия жизни благоприятны для хищников, то скорость изменения численности хищников пропорциональна числу имеющихся хищников. Следовательно,

$$\frac{dz}{dt} = \alpha z, \tag{237}$$

где $\alpha > 0$ — коэффициент естественного прироста численности хищников.

Количество съеденных жертв также пропорционально числу хищников, т. е. равно $(-\beta z)$, где $\beta = \text{const}$ $(\beta > 0)$. Знак минус указывает на убывание числа жертв.

Пусть $k \quad (k > 0)$ — коэффициент пропорциональности роста численности жертв без вмешательства хищников, т. е. коэффициент естественного прироста численности жертв. Тогда скорость изменения численности жертв

$$\frac{dy}{dt} = ky - \beta z. \tag{238}$$

Таким образом, получим систему двух линейных дифференциальных уравнений (237), (238).

Общее решение уравнения (237)

$$z(t) = \tilde{C} e^{\alpha t}.$$

Учитывая первоначальное число хищников, находим $z(0) = p = \tilde{C}$. Следовательно,

$$z(t) = p e^{\alpha t}. \tag{239}$$

Подставляя (239) в (238), получаем линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = ky - \beta p e^{\alpha t}.$$

Его общее решение

$$y(t) = e^{\int k\,dt} \left(C + \int (-\beta p) e^{\alpha t} e^{\int (-k) dt} dt \right),$$

или

$$y(t) = e^{kt} \left(C - \beta p \int e^{(\alpha - k)t} dt \right).$$

Окончательно имеем

$$y(t) = e^{kt} \left(C + \frac{\beta p}{k - \alpha} e^{-(k-\alpha)t} \right), \quad \alpha \neq k.$$

Найдем C из условия $y(0) = q$. Получим

$$q = C + \frac{\beta p}{k - \alpha} \quad \text{и} \quad C = q - \frac{\beta p}{k - \alpha}.$$

Искомое решение

$$y(t) = e^{kt}\left(\left(q - \frac{\beta p}{k - \alpha}\right) + \frac{\beta p}{k - \alpha} e^{-(k-\alpha)t}\right), \quad \alpha \neq k.$$

Если $k > \alpha$, то $y(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$; если $k = \alpha$, то $y(t) = e^{kt}(q - \beta p t)$; если $k < \alpha$, то существует такой момент $t = T$, что $y(T) = 0$.

115. $\begin{cases} x_1 = 150e^t - 50e^{3t}, \\ x_2 = 150e^t + 50e^{3t}. \end{cases}$

116. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -2x_1 + 4x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 - 2x_2, \end{cases}$

$x_1(0) = 100, \quad x_2(0) = 300, \quad x_1 = 350 - 250e^{-4t}$,
$x_2 = 175 + 125e^{-4t}$.

117. $\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = N(a - bI), \\ \dfrac{dI}{dt} = cN, \end{cases}$ где a, b и c — положительные постоянные, I — масса яда в момент t; $\quad k = 1, \quad M = \frac{2}{bc}$.

118. 1) Если $a\alpha \neq b$, то $x_1 = \alpha\left(1 - \frac{a\beta}{a\alpha - b}\left(e^{(a\alpha - b)t} - 1\right)\right)$, $x_2 = \beta e^{(a\alpha - b)t}, \quad x_3 = \gamma + \frac{b\beta}{a\alpha - b}\left(e^{(a\alpha - b)t} - 1\right)$; 2) если $a\alpha = b$, то $x_1 = \alpha(1 - a\beta t), \quad x_2 = \beta, \quad x_3 = \gamma + b\beta t$.

119. В отличие от примера 53, здесь $a = 0$, и уравнение (145) принимает вид $V\,dy = Mb\,dt - My\,dt$, откуда $y = 0.0004 + Ce^{-\frac{Mt}{10800}}$, $y(0) = 0.0012, \quad C = 0.0008$; $M = 1080 \ln 4 \approx 1500\ \frac{\text{м}^3}{\text{мин}}$.

120. 0.124%.

121. $a = -\frac{\ln 2}{3.82} \approx -0.1814$. Рис. 77.

122. $y' = k\left(m_1 - \frac{2}{3}y\right)\left(m_2 - \frac{1}{3}y\right), \quad y(0) = 0$.

123. $-dy = \frac{2y\,dt}{100 + t}; \quad y = \frac{C}{(100 + t)^2}, \quad C = 10^5, \quad y(60) = 3.9$ кг, $t = 15$ ч $\quad \big(y(900) = 0.1\big)$.

124. 4.6 мин. Р е ш е н и е. Для этой задачи $S(x) = \pi y^2$. Из уравнения прямой

$$\frac{x}{h} + \frac{y}{R} = 1$$

находим $y:$ $\quad y = \left(1 - \frac{x}{h}\right) R$ (рис. 78). Подставляя в (163) (см. пример 59), получаем

$$k \sqrt[3]{(h-x)^2} dx = dt, \quad \text{где} \quad k = \frac{\pi R^2}{\mu m h^2 \sqrt{2g}}.$$

Интегрируя при условии $x(0) = 0$, получаем

$$t = \frac{2k}{5} \left(h^{\frac{5}{2}} - (h-x)^{\frac{5}{2}} \right). \tag{240}$$

y y_0 $y = y_0 e^{-0.1814t}$ O 1 t

Рис. 77.

O R y x r h x

Рис. 78.

Далее найдем значение x из условия, что за 2 мин вытекает половина воды. Имеем

$$\frac{2}{3}\pi r^2 (h-x) = \frac{1}{3}\pi R^2 h,$$

откуда

$$2r^2 (h-x) = R^2 h. \tag{241}$$

Из подобия треугольников следует $h - x = \frac{rh}{R}$. Подставляя последнее в выражение (241), получаем $2r^3 h = R^3 h \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{R}{\sqrt[3]{2}}$.

При этом $h - x = \frac{h}{\sqrt[3]{2}}$, т. е. $x = h\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$. Так как при полученном значении x время $t = 2$ мин, то, подставляя это значение в уравнение (240), получаем

$$2 = \frac{2k}{5}h^{\frac{5}{2}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[6]{32}}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2k}{5}h^{\frac{5}{2}} = \frac{2}{1 - \frac{1}{\sqrt[6]{32}}}\,.$$

Для определения времени, за которое вытечет вся вода, в (240) следует положить $x = h$:

$$t = \frac{2k}{5}h^{\frac{5}{2}} = \frac{2}{1 - \frac{1}{\sqrt[6]{32}}} \approx 4.6 \text{ мин.}$$

125. $\frac{kb^2}{2V^2}\left(\sqrt{h} - \frac{kb^2}{8V^2}\right)$. Р е ш е н и е. Для решения используем уравнение (163) из примера 59, в котором m является функцией от t. К моменту $t < t_1$ имеем $m(t) = avt$. Поэтому уравнение (163) принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = kt\sqrt{h - x}, \quad \text{где} \quad k = \frac{\mu aV}{S}\sqrt{2g}.$$

Разделяя переменные и интегрируя при условии $x(0) = 0$, получаем

$$\sqrt{h} - \sqrt{h - x} = \frac{kt^2}{4}\,,$$

откуда

$$x = h - \left(\sqrt{h} - \frac{kt^2}{4}\right)^2.$$

При $t = t_1 = \frac{b}{V}$ имеем указанный результат.

126. 1.8 кг. Р е ш е н и е. Пусть к моменту t в резервуаре содержится x килограммов соли. За время dt в резервуар поступает $4\,dt$ литров воды, а вытекает $2\,dt$ литров смеси, содержащей $2C\,dt$ килограммов соли. Концентрация соли C в момент t

$$C(t) = \frac{x}{75 + 2t}\,.$$

Так как прихода соли нет, то

$$dx = -\frac{2x}{75 + 2t}dt.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$x = \frac{C_1}{75 + 2t}\,.$$

При $t = 0$ имеем $x = 3$, поэтому $C_1 = 225$. Следовательно,

$$x = \frac{225}{75 + 2t}\,.$$

Итак, при $t = 25$ получаем $x = 1.8$.

127. 5.2 кг. Р е ш е н и е. Если воспользоваться обозначениями из примера 60, то $M = 10, \quad V = 90$. Поэтому из уравнения (164) вытекает

$$\frac{x}{x + 20} = \frac{1}{3} e^{\frac{2}{9} kt}.$$

Определим k из условия $x = 5$ при $t = 1: \quad k = \frac{9}{2} \ln \frac{3}{5}$.

Если $M = 10, \quad V = 180$, то, используя значение для k, получаем

$$\frac{x}{x + 50} = \frac{1}{6} \left(\frac{3}{5} \right)^{\frac{5}{4} t}.$$

При $t = 1$ имеем $x = 4.8$. Искомое количество соли равно $M - x = 5.2$.

128. 10.6 мин. Р е ш е н и е. Здесь $x = 0.5, \quad V = 30, \quad M = 2$. Уравнение (164) (см. пример 60) принимает вид

$$\frac{5x}{x + 8} = e^{\frac{4}{15} kt}.$$

Из условия $x = 1$ при $t = 5$ определяем $k = \frac{3}{4} \ln \frac{5}{9}$ и получаем уравнение

$$\frac{5x}{x + 8} = \left(\frac{5}{9} \right)^{\frac{t}{5}}.$$

Подставляя значение $x = 0.5$, находим $t = 10.6$.

129. $\begin{cases} x = \dfrac{b_0}{4} \left(1 - \dfrac{1}{2^t} \right), \\ y = \dfrac{3b_0}{4} \left(1 - \dfrac{1}{2^t} \right). \end{cases}$

Р е ш е н и е. Производная $\frac{dx}{dt}$ выражает скорость образования вещества X, производная $\frac{dy}{dt}$ — скорость образования вещества Y. В момент t масса b разложившегося вещества B определяется следующим образом: $b = b_0 - x - y$.

По условию задачи получаем систему двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = k(b_0 - x - y), \quad \frac{dy}{dt} = l(b_0 - x - y), \tag{242}$$

где k, l — коэффициенты пропорциональности.

Разделив почленно второе уравнение на первое, имеем $\frac{dy}{dx} = \frac{l}{k}$, откуда $y = \frac{l}{k}x + C$.

Используя начальные условия $x = 0, \quad y = 0$ при $t = 0$, находим $C = 0$, следовательно,

$$y = \frac{l}{k}x. \tag{243}$$

Первое уравнение (242) при данном выражении для y принимает вид

$$\frac{dx}{dt} + (k + l)x = kb_0.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$x = \frac{kb_0}{k + l} + C_1 e^{-(k+l)t}.$$

Поскольку $x = 0$ при $t = 0$, то $C_1 = -\frac{kb_0}{k+l}$ и

$$x = \frac{kb_0}{k + l}\left(1 - e^{-(k+l)t}\right). \tag{244}$$

Из уравнений (243) и (244) находим

$$y = \frac{lb_0}{k + l}\left(1 - e^{-(k+l)t}\right). \tag{245}$$

Определим значения коэффициентов k и l. Поскольку при $t = 1 \quad x = \frac{b_0}{8}, \quad y = \frac{3}{8}b_0$, то из равенств (244) и (245) имеем

$$\frac{k}{k + l}\left(1 - e^{-(k+l)}\right) = \frac{1}{8},$$

$$\frac{l}{k+l}\left(1-e^{-(k+l)}\right)=\frac{3}{8}\,.$$

Из этих уравнений получаем

$$1-e^{-(k+l)}=\frac{1}{2}\,,\quad l=3k,$$

или

$$k+l=\ln 2,\quad l=3k,\quad \text{откуда}$$

$$k=\frac{1}{4}\ln 2,\quad l=\frac{3}{4}\ln 2.$$

Уравнения (244) и (245) с этими коэффициентами дают искомые законы.

130. 217 г, 252 г. Указание. $\begin{cases} \dfrac{dB}{dt}=-kB, \\ \dfrac{dC}{dt}=kB-lC, \end{cases}$

где $B(t)$, $C(t)$ — массы веществ $^{214}_{82}\mathrm{Pb}$ и $^{214}_{83}\mathrm{Bi}$ в момент t.

131.
$$x=10-7\left(1-\left(\frac{4}{7}\right)^{\frac{t}{5}}\right),\quad y=7\left(1-\left(\frac{4}{7}\right)^{\frac{t}{5}}\right).$$

Указание: общее число эквивалентов обоих веществ не изменяется в обеих реакциях, т. е. $x+y=x_0+y_0$.

132. $a=0.07\,,\quad y(5)=\sqrt{2}y(0),\quad y(20)=4y(0)$ (рис. 79).

133. $t\approx 23.1$ г.

134. 1 млн 34 тыс. человек.

135. В 2008 г.

136. $P=\frac{sMe^{Mkt}}{1+se^{Mkt}}$. Решение. Предположим, что скорость роста количества P пропорциональна произведению P и разности $(M-P)$. По предположению

$$\frac{dP}{dt}=kP(M-P),$$

где k — постоянный положительный коэффициент.

Интегрируя методом из §3, получаем

$$\frac{1}{M}\ln\frac{P}{M-P}=kt+C\quad\Leftrightarrow\quad P=\frac{sMe^{Mkt}}{1+se^{Mkt}}\,,\qquad(246)$$

где $s=e^{MC}$.

При $t \to +\infty$ величина $e^{Mkt} \to +\infty$, так как для процесса прироста $k > 0$, следовательно, $P \to M$.

С целью лучшего понимания процесса преобразуем далее равенство (246). Пусть P_0 — численность населения в начальный момент $t = 0$. Тогда

$$P_0 = \frac{sM}{1+s}\,.$$

Выразив отсюда величину $s = \frac{P_0}{M-P_0}$, подставим ее в уравнение (246):

$$P = \frac{MP_0}{P_0 + (M-P_0)e^{-Mkt}}\,. \tag{247}$$

y

y_0 $\quad y = y_0e^{0.07t}$

O $\quad 1$ $\quad t$

Рис. 79.

P

M

$\frac{M}{2}$

P_0

O $\quad t$

Рис. 80.

Уравнение (247) дает зависимость роста численности населения при обстоятельствах, препятствующих ему: регулированное размножение, возможные эпидемии и другие факторы. Оно называется логистическим уравнением.

На рис. 80 показана геометрическая интерпретация этого закона.

137. Рис. 81.

138. $\begin{cases} y' = u, \\ u' = -\sin y. \end{cases}$ Рис. 82.

З а м е ч а н и е. Уравнение допускает понижение порядка (см. п. 9.3) и даже интегрируется в квадратурах, но его решение не выражается через элементарные функции.

139. $\begin{cases} y' = u, \\ u' = v, \\ v' = -u \operatorname{tg} x + \dfrac{xy}{x-3}\,. \end{cases}$ Рис. 83.

y
1
-1 1
-4 O 2 x
-1

Рис. 81.

y $\frac{\pi}{2}$
1
-8 O 1 $8x$

Рис. 82.

y 1
$-\frac{\pi}{3}$ O $\frac{\pi}{3}$ x

Рис. 83.

y
1
0.2 1 2
O x
-1

Рис. 84.

140. Первое уравнение системы с соответствующим ему начальным условием имеет решение $x = e^t$ (поэтому x может быть только положительным). Используя правило дифференцирования сложной функции, получаем $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}x$. Кроме того, $t = \ln x$. Подставляя эти соотношения во второе уравнение системы, имеем

$$\frac{dy}{dx} = 2\ln x \cdot y + \frac{1}{x}y^3 + \frac{1}{x}\cos(\ln x \cdot y)$$

с начальным условием $y\big|_{x=1} = 0$. Итак, в этой задаче численно решать следует одно дифференциальное уравнение, а не их систему, что значительно проще. На рис. 84 изображена фазовая траектория системы.

141. $y = x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{3\cdot 4} + \ldots, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$

142. $y = x - \frac{x^2}{(1!)^2\cdot 2} + \frac{x^3}{(2!)^2\cdot 3} - \frac{x^4}{(3!)^2\cdot 4} + \ldots, \quad -\infty < x < +\infty.$

143. $y = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots, \quad -\infty < x < +\infty.$

144. $y = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \ldots, \quad -\infty < x < +\infty.$

145. Рис. 85.

y
1
-1 O 1 x
-1

Рис. 85.

y $\frac{1}{2}$
-1 O 1 x
-1
-2

Рис. 86.

146. Рис. 86.

Рекомендуемая литература

Теоретические курсы

1. *Матвеев Н.М.* Дифференциальные уравнения. — М.: Просвещение, 1988, 256 с.
2. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Физматгиз, 1961, 312 с.
3. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. В 5 т. Т. 2. — М.: Наука, 1974, 656 с., Т. 3., Ч. 1, 2. — М.: Наука, гл. ред. физ-мат. лит., 1974, 323 и 627 с.
4. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. — М.: Физматгиз, 1959, 468 с.

Сборники задач

5. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. — М.: Наука, 1971, 416 с.
6. Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУЗов/ Под ред. *Б.П. Демидовича.* — М.: Физматгиз, 1959, 472 с.
7. *Киселев А.И., Краснов М.Л., Макаренко Г.И.* Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Высшая школа, 1978, 287 с.
8. *Матвеев Н.М.* Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — Минск: Вышэйшая школа, 1987, 320 с.
9. *Филиппов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1992, 128 с.

Приложения

10. *Амелькин В.В.* Дифференциальные уравнения в приложениях. — М.: Наука, 1987, 160 с.
11. *Батунер Л.М., Позин М.Е.* Математические методы в химической технике. — Л.: Химия: 1971, 640 с.
12. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. — М.: Наука, 1976, 288 с.
13. *Костенко И.П.* Дифференциальные уравнения и их приложения. — Краснодар: Краснодар. политехн. ин-т, 1991, 100 с.
14. *Пономарев К.К.* Составление дифференциальных уравнений. — Минск: Вышэйшая школа, 1973, 560 с.
15. *Свирежев Ю.М., Логофет Д.О.* Устойчивость биологических сообществ. — М.: Наука: 1978, 352 с.
16. *Турковский В.А.* Сборник специализированных задач по дифференциальным уравнениям. — Киев: Киевск. политехн. ин-т, 1960, 52 с.
17. *Эрроусмит Д., Плейс К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями — М.: Мир: 1986, 244 с.
18. *Hayes P.* Mathematical Methods in the Social and Managerial Sciences. — N.Y.: Wiley & sons, 1975, 253 p.

19. *Lotka A.J.* Elements of mathematical biology. — N.Y.: Drower, 1956, 465 p.

Литература по численным методам

20. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. В 2 т. Т. 1. — М.: Наука, 1973, 631 с.
21. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. В 2 т. Т. 2. — М.: Физматгиз: 1962, 620 с.
22. *Коллатц Л.* Численные методы решения задач дифференциальных уравнений. — М.: Изд.иностр.лит., 1953, 460 с.
23. *Крылов В.И., Бобков В.А., Монастырный П.И.* Вычислительные методы. В 2 т. Т. 2. — М.: Наука, 1977, 399 с.
24. *Ланс Д.Н.* Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. — М.: Изд.иностр.лит., 1962, 208 с.
25. *Милн В.Э.* Численное решение дифференциальных уравнений. — М.: Изд.иностр.лит., 1955, 291 с.
26. *Мысовских И.П.* Лекции по методам вычислений. — СПб.: Изд-во СПбГУ, 1998, 470 с.
27. *Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений. — М.: Мир: 1980, 279 с.

Предметный указатель

Оглавление

Учебное издание
Аркадий Кузьмич Пономаренко
Вадим Юрьевич Сахаров
Татьяна Владимировна Степанова
Петр Константинович Черняев
Учебные и контрольные задания
по обыкновенным дифференциальным уравнениям
Учебное пособие

Зав. редакцией А. А. Гранаткина
Редактор Т. Ф. Шпагина
Оформление обложки Е. И. Егоровой

Лицензия ЛР №040050 от 15.08.96

Подписано в печать 27.04.2000. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 13,25. Уч.-изд. л. 11,3. Тираж 600 экз.
Заказ 272.

Издательство СПбГУ.
199034, С.-Петербург, Университетская наб., 7/9

ЦОП типографии Издательства СПбГУ.
199034, С.-Петербург, наб. Макарова, 6.